14 YHTÄLÖ $\eth u + \alpha(x) u = 0$

Kun $\nabla \varepsilon$ ja $\nabla \mu$ ovat pieniä verrattuna ε:aan ja μ:hyn päädytään aikaharmonisessa tilanteessa yhtälöistä

$$\eth_{\alpha_\varepsilon} E = i\alpha H - \rho/\sqrt{\varepsilon}$$

$$\eth_{\mu_\varepsilon} H = -i\alpha E + \sqrt{\mu}\, j$$

yhtälöihin

$$\eth E = i\alpha H$$

$$\eth H = -i\alpha E$$

Lähteet ρ ja j on myös oletettu nolliksi. Merkitään

$$\phi = E + iH$$

$$\psi = E - iH$$

saadaan

$$\eth_{-\alpha} \phi = 0 \quad \text{ja} \quad \eth_\alpha \psi = 0$$

Olk. $\alpha : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Tark. yhtälöä

$$(14.1) \qquad \mathcal{S}_\alpha u = (\not\partial + \alpha(x))u = 0$$

olet. että φ toteuttaa eikonaaliyhtälön

$$(14.2) \qquad (\nabla\phi)^2 = \alpha^2.$$

Määr. $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-arvoiset funktiot $\varphi^\pm$:

$$\varphi^\pm(x) = \alpha \pm \nabla\phi(x).$$

Tällöin $\forall x$, $\varphi^\pm(x)$ on 0-jakaja:

$$\varphi^+(x)\varphi^-(x) = \alpha^2(x) - (\nabla\phi(x))^2 = 0.$$

Olk.

$$y = e^\phi.$$

Tällöin

$$\nabla\phi = \frac{\nabla y}{y}$$

14.1 Lemma

$$\not\partial + \alpha(x) = \eta\,(\not\partial + \phi^+)\,\eta^{-1}$$

Proof

$$(\not\partial + \alpha(x)) = \not\partial + (\alpha + \nabla\phi - \nabla\phi)$$

$$= \not\partial + \left(\alpha + \nabla\phi - \frac{\nabla\eta}{\eta}\right)$$

$$= \not\partial + \phi^+ - \frac{\nabla\eta}{\eta}$$

Toisaalta

$$\eta\,(\not\partial + \phi^+)\,\eta^{-1} f = \phi^+ + \eta\,\not\partial\,\eta^{-1} f$$

$$= \phi^+ f - \eta\,\frac{\nabla\eta}{\eta^2} f + \not\partial f =$$

$$= \left(\phi^+ - \frac{\nabla\eta}{\eta} + \not\partial\right) f$$

$\square$

Siis $\not\partial + \alpha(x)\,u = 0$ on redusoitu tapaukseen

(14.3) $\quad (\not\partial + \phi^+(x))\,v = 0$

Herää kysymys onko saavutettu mitään edistystä sillä α on [illegible] ja ϕ^+ kvaternioita?

Etsitään (14.3):lle ratkaisua muodossa

(14.4) $$v = \phi^- s .$$

Sij. (14.3):een:

$$(\delta + \phi^+)\phi^- s = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta \phi^- s = 0$$

Tulee siis määrittää

$$\operatorname{Ker}\delta \cap \operatorname{Im}\phi^- .$$

Ongelmana on siis se, että ϕ^- on 0-jakaja

Tapaus! $\alpha(x) = \alpha(x_1)$ eli α riippuu vain yhdestä muuttujasta

Olk. $$\Theta = \int \alpha \, dx$$

eli Θ on jokin α:n integraalifunktio.

Nyt. ja

$$\phi_1 = i\theta \quad \text{ja} \quad \phi_2 = -i\theta$$

niin

(14.5) $$(\nabla\phi_i)^2 = -(\theta' e_1)^2 = (\theta')^2 = \alpha^2$$

Huom

Myös funktiot muotoa

$$\phi = \pm i\theta + \varphi \, ,$$

missä φ riippuu analyyttisesti (tai antianalyyttisesti) muuttujasta $z = x_2 + i x_3$, toteuttavat (14.5):n!

Jos

$$\phi = i\theta + \varphi \, ,$$

niin

$$\nabla\phi = i\nabla\theta + \nabla\varphi = i\alpha e_1 + \partial_2\varphi \, e_2 + \partial_3\varphi \, e_3 =$$

$$\Rightarrow (\nabla\phi)^2 = \alpha^2 - (\partial_2\varphi)^2 - (\partial_3\varphi)^2$$

Mutta, jos φ on analyyttinen, niin

$$\bar\partial\varphi = \tfrac{1}{2}(\partial_2 + i\partial_3)\varphi = 0 \quad \text{eli}$$

$$\partial_2 \varphi = -i\partial_3 \varphi$$

mistä väite seuraa.

$\square$

Tarkastellaan ensin funktiota ϕ_1:

$$\eta_1 = e^{\phi_1} = e^{i\theta}$$

jota

$$Q_1^{\pm}(x_1) = \alpha(x_1) \pm i\alpha(x_1)e_1$$

$$= \alpha(x_1)(1 \pm ie_1)$$

Huom

$$v = \eta^{-1}u = e^{-\phi_1}u$$

Etsimme v:tä muodossa

$$v = Q^{-}s = \alpha(x_1)(1-ie_1)s$$

Funktiolle s saadaan ehto

$$\gamma\Big(\alpha(x_1)(1-ie_1)s(x)\Big) = 0$$

$$\overset{(14.6)}{\Leftrightarrow} \quad \gamma\Big((1-ie_0)\alpha(x_1)s(x)\Big) = 0$$

Olk. nyt $f(x) = \alpha(x_1)s(x)$

Bi-kompleksi-analyysi:

$$f = F_1 + F_2 e_2$$

$$F_1 = f_0 + f_1 e_1 \quad \text{ja} \quad F_2 = f_2 + f_3 e_1$$

Nyt, ja $P^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \mp i e_1)$ ovat o-jakoja projektioita, niin (14.6) $\iff$

(14.7) $$\gamma(P^{+} f) = 0$$

ja $$[F_i, P^{\pm}] = 0$$

Tod. $2 F_1 P^{\pm} = (f_0 + f_1 e_1)(1 \mp i e_1) = 2 P^{\pm} F_1$ □

Lisäksi

$$P_+ e_2 = e_2 P_- ,$$

joten (14.7) $\iff$

$$0 = \gamma\left(P^{+}(F_1 + F_2) e_2\right)$$
$$= \gamma(F_1 P^{+}) + \gamma(F_2 e_2 P^{-})$$
$$= (\gamma F_1) P^{+} + (\gamma F_2 e_2) P^{-}$$

$\iff$

$$(\gamma F_1) P^{+} = 0$$

$$(\gamma F_2) P^{+} = 0$$

Yht. $(\bar{\partial} F_1) P^+ = \bar{\partial}(P^+ F_1) = 0$
ratkaisu F_1 voidaan selvästi kirjoittaa muodossa

$$F_1 = H_1 + S_1 P^-$$

missä S_1 on mielivalt. ja

(14.8) $$\bar{\partial} H_1 = 0$$

Tässä $H_1 = h_0 + h_1 e_1$.

<u>Lemma</u> Jos $H_1 = h_0 + h_1 e_1$ toteuttaa (14.8) niin

$$H_1(x_1, x_2, x_3) = H(x_2, x_3)$$

on analyyttinen muuttujan $z = x_2 + x_3 e_1$ funktio

<u>Tod</u> $\bar{\partial} = \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2 + \partial_3 e_3$
Siis

$$\bar{\partial} H_1 = 0 \iff$$

$$(\partial_1 e_1 + \partial_2 e_2 + \partial_3 e_3)(h_0 + h_1 e_1) = 0$$

$\iff$ $\partial_1 h_1 = 0 = \partial_1 h_0$

(14.9) $$\begin{cases} \partial_2 h_0 + \partial_3 h_1 = 0 \\ \partial_3 h_0 + \partial_2 h_1 = 0 \end{cases}$$

Siis H_1 on riippumaton x_1:stä ja toteuttaa Cauchy-Riemannin ehdot muuttujien x_2 ja x_3 suhteen $\square$

$\Rightarrow$)

$$u_1(x) = e^{i\theta(x_1)}\left(H_1(z)P_+A_1 + H_2(z)P_-A_2\right)$$

on operaattorin $(\gamma + \alpha(x_1))u_1(x)$ ratkaisu, kun H_1 ja H_2 ovat muuttujan $z = x_3 + x_2 e_1$ (kompleksi) analyyttisiä funktioita. Toinen lin. riippumaton ratkaisu on

$$u_2(x) = e^{-i\theta(x_1)}\left(G_1(z)P_-B_1 + G_2(z)P_+B_2\right)$$

kun G_i:t analyyttisiä ja B_i:t vakioita.