6. Radiaatioehto (säteilyehto)

Old. tässä lauseen $\alpha := k \in \mathbb{R}_+$

Nyt $(\Delta + k^2)$:lla on kaksi perusratkaisua

$$u_+(x) := -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

$$u_-(x) := \frac{e^{+ik|x|}}{4\pi|x|}$$

jotka molemmat $\to 0$, kun $|x| \to \infty$.

Merk. $r := |x|$. Nyt u_+ toteuttaa **Sommerfeldin säteilyehdon** (outgoing)

(6.1) $\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right) u_+(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$

ja u_- sisääntulevan ehdon (ingoing)

(6.2) $\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik\right) u_-(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$

Huom! Merkintä $f(x) = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$ tarkoittaa

$$|x|^\alpha f(x) \longrightarrow 0, \quad |x| \to \infty$$

Merkintä $f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$ tarkoittaa

$$|x|^\alpha f(x)$$

on rajoitettu x:ssä.

Huom? Ilmeinen ehto:

$$(\partial_r - ik)\, u_+(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

Nyt

$$K^+ = -\partial_{-k} u^+ = -(\partial - k)\, u^+ \quad \text{ja}$$

$$K^- = -\partial_{+k} u^- = -(\partial + k)\, u^-$$

Huom $-\partial_{-\alpha}\phi_\alpha$ on ∂_α:n perusratkaisu, eikä $-\partial_\alpha \phi_\alpha$, Vrt. Lemma 4.3

Antamme Sommerfeldin säteilyehdon vastineen kvaternioille:

$$(6.3) \quad \left(\alpha - \frac{x}{|x|^2} + i\alpha \frac{x}{|x|}\right) K(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty.$$

Perusratkaisuista $K^\pm$ vain K^+ toteuttaa (6.3):n (HT), kun $\alpha = k > 0$.

6.1 Lause (Cauchyn kaava ulkoalueessa).

Olk. $f \in C^1(\Omega^c) \cap C_0(\bar{\Omega}^c)$ sell. että $\partial_\alpha f = (\partial + \alpha) f = 0$ ja että (6.3) pätee. Tällöin

(6.4) $$f(x) = -K_\alpha(f)(x) \quad \forall\, x \in \Omega^c .$$

Yllä $\Omega^c = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ja $C_0(\bar{\Omega}_c) = \{ f \text{ jva ja } f(x) \to 0, \ |x| \to \infty \}$.

Tod. Olk. $B = B(0, R)$, missä $R > 0$ on niin suuri, että

$$\bar{\Omega} \subset B(0, R)$$

Sovelletaan Lausetta 5.5. alueeseen $B \setminus \bar{\Omega}$ saadaan

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y)\, n(y)\, f(y)\, ds(y) - \int_{\partial B} K_\alpha(x-y)\, \frac{y}{|y|}\, f(y)\, ds(y)$$

Kun $R \to \infty$ saadaan

$$\int_{\partial B} K_\alpha(x-y)\frac{y}{|y|}f(y)\,ds(y) \to 0$$ jos

$\operatorname{Im}\alpha > 0$. Jos $\operatorname{Im}\alpha = 0$ käytetään radiaatioehtoa:

$$I := \int_{\partial B} K_\alpha(x-y)\frac{y}{|y|}f(y)\,ds(y)$$

$$= \int_{\partial B}\left(\alpha + \frac{(x-y)}{|x-y|^2} - i\alpha\frac{x-y}{|x-y|}\right)\phi(x-y)\frac{y}{|y|}f(y)\,ds(y)$$

Nyt

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|} + \frac{y}{|y|}\right| = O\left(\frac{1}{|y|}\right), \text{ kun } |y| \to \infty$$

joten

$$I = \int_{\partial B}\phi(x-y)\frac{y}{|y|}\left(\alpha - \frac{y}{|y|} + i\alpha\frac{y}{|y|}\right)f(y)\,ds(y)$$

$$+ \int_{\partial B}\phi(x-y)\,O\left(\frac{1}{|y|}\right)\frac{y}{|y|}f(y)\,ds(y).$$

Jälkimmäinen integraali $\to 0$ sillä $f \in C_0(\Omega^c)$ nojalla ja ensimmäinen radiaatioehdon (6.3) nojalla. $\square$

Huom Edellisessä lauseessa oletettiin, että $f \in C_0(\bar{\Omega}^c)$. Siten

$$\left(\alpha - \frac{x}{|x|^2} + i\alpha \frac{x}{|x|}\right) f(x) = \alpha\left(1 + i\frac{x}{|x|}\right) f(x) + O\left(\tfrac{1}{|x|}\right) f(x)$$

$$= \alpha\left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) f(x) + o\left(\tfrac{1}{|x|}\right)$$

Näin ollen voimme korvata ehdon (6.3) yksinkertaisemmalla ehdolla

(6.4) $$\left(1 + \frac{ix}{|x|}\right) f(x) = o\left(\tfrac{1}{|x|}\right).$$

Seuraavaksi osoitetaan, että ehto (6.4) yhdessä ehdon $\partial_\alpha f = 0$ kanssa implikoi sen, että $f \to 0$ äärettömyydessä.

6.2. Lause Jos $\partial_\alpha f = 0$ ja (6.4) pätee, niin

$$\int_{|x|=R} |f(x)|^2 \, ds(x) = O(1)$$ eli

e.o. integraali pysyy rajoitettuna, kun $R \to \infty$.

Puhtaasti. niiden kvaternioiden pituus

$$|q|^2 = |q_0 + q_v|^2 = |q_0|^2 + |q_v|^2$$

Kvaterniokonjugaatti

$$q^* = q_0 - q_v$$

ja ~~kompleksi~~ konjugaatti

$$\bar{q} = q_0 + \bar{q}_1 e_1 + \bar{q}_2 e_2 + \bar{q}_3 e_3$$

joten

$$|q|^2 = sc(q\bar{q}^*)$$

Siis

$$\left|\left(1+\frac{ix}{|x|}\right)f\right|^2 = sc\left(1+\frac{ix}{|x|}\right)f\bar{f}^*\left(1+\frac{ix}{|x|}\right)$$

Käyttämällä tuloksia (HT)

$$sc(ef\bar{f}^*e) = |f|^2$$

$$sc(f\bar{f}^*e) = sc(ef\bar{f}^*)$$

kun $e \in \mathbb{R}^3$, $|e| = 1$, nähdään

$$(6.5) \qquad \left|\left(1+\frac{ix}{|x|}\right)f\right|^2 = 2\cdot\left(|f|^2 + i\,sc\,\frac{ix}{|x|}f\bar{f}^*\right).$$

Koska $sc(qp) = sc(pq)$ saadaan

$$sc\,\frac{x}{|x|}f\bar{f}^* = sc\left(\bar{f}^*\frac{x}{|x|}f\right) \in i\mathbb{R}$$

Sillä (6.5):n muut termit reaalisia.

Tästä seuraa, että

$$\left|\left(1+\frac{ix}{|x|}\right)f\right|^2 = 2\left(|f|^2 - \mathrm{Im}\,\mathrm{sc}\left(\bar{f}^*\frac{x}{|x|}f\right)\right)$$

Ehdon (6.4) nojalla riittää osoittaa, että $\exists C>0$

$$(6.6) \qquad \mathrm{Im}\,\mathrm{sc}\int_{|x|=R} \bar{f}^*(x)\frac{x}{|x|}f(x)\,ds(x) \le C$$

pätee $\forall\ R > R_0$.

Käyttämällä osittaisintegroimiskaavaa (Lause 5.2) saadaan

$$(6.7) \qquad \int_{|x|=R} \bar{f}^*(x)\frac{x}{|x|}f(x)\,ds(x) = \int_{\Gamma} \bar{f}^*\nu(x)f(x)\,ds(x)$$

ei riipu R:stä

$$+ \int_{\Omega_R} (\partial_r \bar{f}^*(x))f(x) + \bar{f}^*(x)\,\partial_r f(x)\,dx.$$

Nyt

$$\partial f(x) = -\alpha(x)f(x) \qquad \text{(oletus)}$$

ja

$$\partial_r \bar{f}^*(x) = -(\partial\bar{f})^* = -(\overline{\partial f})^*$$
$$= (\overline{\alpha f})^* = \bar{\alpha}\bar{f}^*$$

Näinollen

$$\int_{\Omega_R} \left((\gamma_r \bar{f}^*) f + \bar{f}^* \gamma f \right) dx$$

$$= \int_{\Omega_R} \bar{\alpha} \bar{f}^* f + \alpha \bar{f}^* f =$$

$$= -2i(\operatorname{Im}\alpha) \int_{\Omega_R} \bar{f}^* f \, dx$$

Näinollen 6.7 :n nojalla

$$\operatorname{Im} \kappa \left(\int_{|x|=R} \bar{f}^*(x) \frac{x}{|x|} f(x) \, dx \right)$$

$$= C_0 - 2 \underbrace{\operatorname{Im}\alpha}_{\geq 0} \int_{\Omega_R} |f|^2 dx \leq C_0$$

josta (6.6) seuraa $\square$

Samantapaisesti saadaan Lauseen 6.1 yleistys:

<u>6.3 Lause</u> Jos $f \in C^1(\Omega^c) \cap C(\overline{\Omega}^c)$ toteuttaa

$$\partial_\alpha f = 0 \qquad \text{ja}$$

säteilyehdon

$$\left(1 + i\frac{x}{|x|}\right) f(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

niin

$$f(x) = -K_\alpha f(x)$$

<u>Tod</u> Ehdosta

$$(6.8) \qquad \int_{|x|=R} |f(x)|^2 \, dx = O(1)$$

ei seuraa $f \in C_0$ (eikä päinvastoin), mutta tarkastelemalla Lauseen 6.1 todistusta nähdään, että (6.8) on riittävä ehto (HT). $\square$