KLUENNOT 2

2 GRASSMANNIN ALTERNOIVA ALGEBRA

2.1 TENSORITULO

2.1. Määr. Olk. U, V ja T äärellisulott. vektoriavaruuksia (joko reaalisia tai kompleksisia) ja $\tau : U \times V \to T$ bilin.

Tällöin $T = U \otimes V$,

jos $\forall\, W$ v.a. ja

jokaiselle bilin. kuvaukselle

$$F : U \times V \to W$$

$\exists!$ lin. $A : T \to W$ s.e.

$$F = A \circ \tau$$

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \arrow[d, "A"] \\
U \times V \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

Huom 1 Jos $x \in \mathcal{U}$ ja $y \in V$, niin
merk. $\tau(x,y) = x \otimes y \in \mathcal{U} \otimes V$

Huom 2 $\forall\ \mathcal{U}, V\ \exists\ \mathcal{U} \otimes V$

Tod HT

Huom 3 $\{e_i\}$ kanta $\mathcal{U}$:ssa ja
$\{f_j\}$ on kanta V:ssä. $\Longrightarrow$
$\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ on kanta $\mathcal{U} \otimes V$:ssä

Huom 4 Kaikki tensoritulot ovat
isomorfisia

9.2 ALTERNOIVAT MUODOT

9.2.1 Määr. p-lin. muoto

$$F : V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on alternoiva
jos
$$F(x_1, \dots, x_p) = 0,$$
kun $x_i = x_{i+1}$, jollain i.

Jos F on p-lin. niin merk. $F \in A_p(V)$

Olk. σ joukon $J_p = \{1, \ldots, p\}$ permutaatio. Merk. $\sigma \in S_p$.
Tällöin määr.

$$\sigma F(x_1, \ldots, x_p) = F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})$$

2.2 Lause Jos F on alternoiva p-muoto, niin

(i) $\sigma F = \varepsilon(\sigma) F$

erityisesti

(ii) $F(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_p) =$
$- F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$

Tod Osoit. (ii): Määr. mukaan

$$0 = F(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_p)$$
$$= F(x_2, x_1, \ldots, x_p) + F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

$\square$

2.3 Seuraus olk. $\dim V = n$ ja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ V:n kanta. Tällöin

$$F(Ae_1, \ldots, Ae_n) = \det A \; F(e_1, \ldots, e_n)$$

Tod Olk. $A = (a_{ij})$

Tällöin

$$F(Ae_1, \ldots, Ae_n) =$$

$$F\left(\sum a_{i1} e_i, \ldots, \sum a_{in} e_i\right)$$

$$= \sum_{\varphi} a_{\varphi(1)1} \cdots a_{\varphi(n)n} F(e_{\varphi(1)}, \ldots, e_{\varphi(n)})$$

missä φ käy läpi kaikki kuvaukset $J_n \to J_n$. Jos φ ei ole injektio, on

$$F(e_{\varphi(1)}, \ldots, e_{\varphi(n)}) = 0.$$

Jos taas φ on injektio, niin $\varphi \in S_n$ ja siten

$$F(Ae_1, \ldots, Ae_n) =$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} a_{\varphi(1)1} \cdots a_{\varphi(n)n} F(e_{\varphi(1)}, \ldots, e_{\varphi(n)})$$

$$= \underbrace{\sum_{\varphi \in S_n} a_{\varphi(1)1} \cdots a_{\varphi(n)n}\, \varepsilon(\varphi)}_{=\det A} F(e_1, \ldots, e_n)$$

Lause 2.2.

$\square$

2.4 Lause Jos $\dim V = n$ on

$$\dim A_p(V) = \binom{n}{p}.$$

Erityisesti

$$\dim A_n(V) = \dim A_1(V) = 1$$

Tod HT.

2.5 Lause $\det(AB) = \det A \det B$

Olk. $F \in A_n(V)$, $F \neq 0$ ja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ V:n kanta. Tällöin

Tod Void. ol. että A ja B ovat kääntyviä (jos ei, molemmat puolet nollia). Nyt Lause 2.2. $\Rightarrow$

$$\det(AB) F(e_1, \ldots, e_n) =$$
$$F(AB e_1, \ldots, AB e_n) =$$
$$= \det A \, F(Be_1, \ldots, Be_n)$$
$$= \det A \det B \, F(e_1, \ldots, e_n)$$

Koska $F(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$, seuraa väite.

$\square$

2.3 SYMMETRISET JA ANTISYMMETRISET TENSORIT

Lemma $(V \otimes U)^* = V^* \otimes U^*$

Tod olk.

(1) $$x^* \otimes y^* \in V^* \otimes U^*$$

Nyt $I(x^* \otimes y^*) \in (V \otimes U)^*$

(2) $$\langle I(x^* \otimes y^*), x \otimes y \rangle = \langle x^*, x \rangle \langle y^*, y \rangle$$

Koska $x \otimes y$ ovat alkiot viittäävät $V \otimes U$:n, määrittelee (2) lin. muodon $V \otimes U$:ssa eli $(V \otimes U)^*$:n alkion. Koska muotoa $x^* \otimes y^*$ olevat alkiot virittävät $V^* \otimes U^*$ saadaan injektiivinen lin. kuvaus

$$I : V^* \otimes U^* \to (V \otimes U)^*$$

Jos $\dim V = n$ ja $\dim U = m$, on

$$\dim(V^* \otimes U^*) = \dim(V \otimes U)^* = nm$$

Siis I on myös surjektio.

$\therefore$ I on luonnollinen isomorfismi

$$I : V^* \otimes U^* \longrightarrow (V \otimes U)^*$$

Yleistys n:n avar. tensoritulaan:

Jos $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to U$ on n-lin. niin se voidaan faktorisoida:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \dots \times V_n \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & U \\
V_1 \otimes \dots \otimes V_n \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

Jos $T \in L(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, U)$ niin $T \circ \tau$ on n-lin ja kuvaus

$$T \mapsto T \circ \tau,$$

(1) $$L_n(V_1, \dots, V_n; U) \to L(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, U)$$

on isomorfismi. Malli

(2) $$L(V, U) \simeq U \otimes V^*$$

(Kuvaus on $y \otimes x^* : x \mapsto \langle x^*, x \rangle y$)

Siis (1) & (2) $\Longrightarrow$

$$L_n(V_1, \dots, V_n; U) \simeq U \otimes V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^*$$

jolloin

$$y \otimes x_1^* \otimes \dots \otimes x_n^* : (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x_i \rangle \, y$$

Merk. usein

$$V^{\otimes p} = V \otimes \dots \otimes V \quad \text{ja}$$

$$T_q^p(V) = (V^*)^{\otimes q} \otimes V^{\otimes p}$$

Symmetriset ja antisymmetriset tensorit:

Kun $\sigma \in S_r$

$$P_\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(r)}$$

jolloin

$$P_\sigma P_\tau = P_{\tau\sigma}$$

Määr! $X \in V^{\otimes r}$ on symmetrinen, jos

$$P_\sigma(X) = X \quad , \forall \sigma \in S_r$$

ja x on alternoiva, jos

$$P_\sigma(x) = \varepsilon(\sigma)\, x \quad \forall \sigma \in S_n$$

<u>Määr 7</u> Operaattori

$$S = \sum_{\sigma \in S_n} P_\sigma$$

on symmetrisoija ja

$$A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, P_\sigma$$

on alternoija.

2.4 GRASSMANIN ALGEBRA

Määr ensin tensorialgebra

$$X(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

Tässä $(V)^{\otimes 0} = \mathbb{K}$.

$$t \in X(V) \iff t = \sum_{i=1}^{p} t_i$$

jollain p ja $t_i \in V^{\otimes i}$.

Jos $t_r \in V^{\otimes r}$ on alternoiva niin merk.

$$t_r \in \Lambda^r(V)$$

Nyt $\Lambda^r(V)$ on $V^{\otimes r}$:n $\binom{n}{r}$-ulott. vektorialiavaruus, jos $\dim V = n$.

Huom. Kahden alternoivan tensorin tensoritulo ei ole yleensä alternoiva

Korjataan asia.

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A^r(V) = \bigoplus_{r=0}^{n} A^r(V)$$

jolloin $\Lambda(V) = \mathcal{X}(V)$:n 2^n-ulott. vektorialiavaruus. Määr. tällöin $\Lambda(V)$:ssä kiilatulo:

$$\left.\begin{aligned} t &= \oplus t_r \\ t' &= \oplus t'_r \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$t \wedge t' = \bigoplus_{s=0}^{n} \left(\sum_{r_1+r_2=s} \frac{1}{r_1!\, r_2!} A(t_{r_1} \otimes t'_{r_2}) \right)$$

Esim. $t \in \Lambda_r$ ja $t' \in \Lambda_{r'}$ $\Longrightarrow$

$$t \wedge t' = (-1)^{rr'} (t' \wedge t)$$

Tod HT

Rappel

nota

Si $t \in \Lambda^{n_1}$ et $t' \in \Lambda^{n_2}$

$$t \wedge t' = \frac{1}{n_1!\, n_2!} A(t_{n_1} \otimes t_{n_2})$$