<u>Tod</u> Todistus sivuutetaan tässä vaiheessa.

□

<u>Huom</u> Lause 5.3 tunnetaan <u>Moreran lauseena kvaternioille</u>. Erit. jos $\alpha = 0$ se void. kirjoittaa muotoon

$$\mathcal{D} g = 0 \quad \Omega\text{:ssa} \iff$$
$$\int_{\partial\Omega_1} \nu g \, ds = 0 \qquad \forall\ \Omega_1 \subset \Omega .$$

Jatkossa oletetaan, että pinnat ovat aina Liapunov-säännöllisiä.

Olk.
$$K_\alpha = -\mathcal{D}_{-\alpha} \Phi_\alpha$$
Diracin yht. perusratk. Määr. kolme operaattoria T_α, S_α ja S_α:

$$T_\alpha f(x) = \int_\Omega K_\alpha(x-y) f(y)\, dy \, , \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$K_\alpha f(x) = -\int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y)\, \nu(y) f(y)\, ds(y) \, , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$$

$$S_\alpha f(x) = -2 \int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y)\, \nu(y) f(y)\, ds(y) \, , \quad x \in \partial\Omega$$

Palaut. mieleen Cauchyn integraalikaava kompleksianalyysista:

$$\left.\begin{array}{l} f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ \bar{\partial} f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z}\, dw ,$$

Koska

$$\bar{\partial} \frac{1}{z} = \delta ,$$

voidaan kysyä pätee kö

$$f(x) = K_0 f(x) \quad , \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = - \int K_0(x-y)\, n(y)\, f(y)\, ds(y)$$

$$= - \int \frac{x-y}{|x-y|^2} \phi_0(x-y)\, n(y)\, f(y)\, ds(y) \; ?$$

Vastaus on myönteinen ja todistetaan Seuraavaksi 5.5

Cauchyn integraalikaava on taas erikoistapaus tuloksesta

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(w)}{w-z}\,dw + \frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\frac{\bar\partial f(w)}{w-z}\,dm(w)$$

Tämä pätee kun $f \in C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega)$.

<u>5.4 Lause</u> (Borel-Pompeiun kaava kvaternioille)
Kun $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, niin

$$f(x) = K_\alpha(f)(x) + T_\alpha \mathcal{D}_\alpha f(x),$$

kun $x \in \Omega$.

Tästä seuraa välittömästi

<u>5.5 Seuraus</u> (Cauchyn kaava kvaternioille)
Jos $f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ ja $\mathcal{D}_\alpha f = 0$, niin

$$f(x) = K_\alpha f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

<u>Lauseen 5.4 todistus:</u> Aloitetaan termistä

$$T_\alpha \mathcal{D}_\alpha f(x) = \int_\Omega K_\alpha(x-y)\,\mathcal{D}_\alpha f(y)\,dy$$

Ideana on käyttää Lausetta 5.2 ja redusoida eo. integraali pintaintegraaliksi.

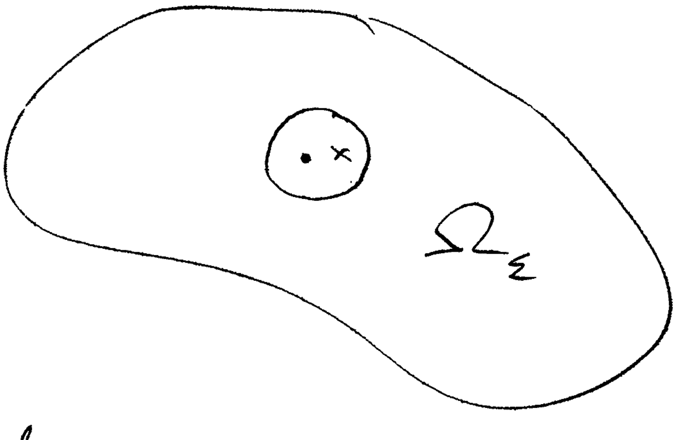
Ongelma: $y \mapsto K_\alpha(x-y)$ ei C^1 alueessa Ω; se on singulaarinen pisteessä $y = x \in \Omega$.

Ratkaisu:

$$\int_\Omega K_\alpha(x-y)\,\bar\partial f(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} K_\alpha(x-y)\,\bar\partial_\alpha(y)\,dy$$

missä

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$$



Nyt

$$\int_{\Omega_\varepsilon} K_\alpha(x-y)\,\bar\partial_\alpha f(y)\,dy =$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} K_\alpha(x-y)(\bar\partial + \alpha)\,f(y)\,dy =$$

$$= -\int_{\Omega_\varepsilon} \bar\partial_{x,y} K_\alpha(x-y)\,f(y) + K_\alpha(x-y)\,\alpha f(y)\,dy$$

$$+ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} K_\alpha(x-y)\,\nu(y)\,f(y)\,dS(y)$$

Koska
$$\partial_{r,y} K_\alpha(x-y) = -\partial_{r,x} K_\alpha(x-y)$$
$$= -(\partial_r K_\alpha)(x-y)$$
saadaan, (sillä $\partial_r K_\alpha = \partial K_\alpha$)
$$\int_{\Omega_\varepsilon} K_\alpha(x-y)\, \partial_\alpha f(y)\, dy$$
$$= \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{((\partial+\alpha) K_\alpha)}_{=0}(x-y)\, f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} K_\alpha(x-y)\, \nu(y)\, f(y)\, ds(y)$$
$$= \int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y)\, \nu(y)\, f(y)\, dy - \int_{\partial B_\varepsilon} K_\alpha(x-y)\, \nu(y)\, f(y)\, ds(y)$$

Nyt
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} K_\alpha(x-y)\, \nu(y)\, f(y)\, ds(y)$$
$$= f(x)$$
(Tod. HT). $\blacksquare$