K luento 8

Hodgen $*$-operaattori

Kun V on (äärellisulotteinen) sisätuloavaruus esim. $V=\mathbb{R}^m$, niin $\Lambda^k(V)$:hen aset. sisätulo

$$\langle \omega, \tau \rangle = \langle \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k, \tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_k \rangle$$

$$= \det \langle \omega_i, \tau_j \rangle$$

kun $\omega_i, \tau_j \in \Lambda^1(V) = V$.

5.4. Määr. Olk. $\omega \in \Lambda^k(V)$ ja $\tau \in \Lambda^{m-k}(V)$. Määr. $* : \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^{m-k}(V)$ ehdolla, että $*\omega$ on se $(m-k)$-muoto, jolle

$$\langle *\omega, \tau \rangle \,\mathrm{vol} = \omega \wedge \tau$$

missä $\mathrm{vol} \in \Lambda^m(V)$ on yksikkömuoto (tilavuusalkio)

6.5 Lemma $** = \pm\, \mathrm{id}$. Tarkemmin, jos $\omega \in \Lambda^k(V)$, niin

$$** \omega = (-1)^{k(m-k)} \omega$$

Tod. Olk. $\{e_1, \dots, e_m\}$ avar. $V = \Lambda^1(V)$ ON-kanta. Tällöin

$$vol = e_1 \wedge \dots \wedge e_m .$$

Operaattorin $*$ lineaarisuuden nojalla riittää osoittaa väite, kun

$$\omega = e_J = e_1 \wedge \dots \wedge e_k .$$

Määr. mukaan

$$\langle * e_J, e_I \rangle e_1 \wedge \dots \wedge e_m = e_J \wedge e_I$$

oikea puoli on nollasta eroava vain kun $I = \pm(k+1, \dots, m)$. Valitsemalla $e_I = e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_m$ nähdään, että

$$* e_J = e_I = e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_m$$

Koska

$$e_I \wedge e_J = (-1)^{k(m-k)} e_J \wedge e_I$$

saadaan

$$\langle * e_I, e_K \rangle vol = e_I \wedge e_K$$

$$= (-1)^{k(m-k)} e_K \wedge e_I$$

Taas oikea puoli $\neq 0$, vain jos $K = J$

$\Rightarrow \quad *e_I = (-1)^{k(n-k)}$

$\square$

Maxwellin yhtälöt muodoilla

Jos samaistetaan 1-muodot ja vektorikentät (mikä on luonnollista, koska $\Lambda^1(V) \simeq V$), niin

$$E, H : \Omega \longrightarrow \Lambda^1(V),$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3 = V$.

Esimerkin 6.3 voi myös $*$-oper. avulla kirjoittaa muotoon

6.6 **Lemma** $\mathbb{R}^3$:ssa pätee

(i) $df = \nabla f$, kun f on 0-muoto

2-muoto

(ii) $d\omega = *(\nabla \times \omega)$, kun ω on 1-muoto

(iii) $d\omega = (\nabla \cdot *\omega)\,\mathrm{vol}$, kun ω on

Tod (i) on triv.

(ii) Pätee

$$* (e_2 \wedge e_3) = t\, e_1 \quad , \quad \text{missä } t = \pm 1$$

Nyt

$$\overset{=t}{\langle * e_2 \wedge e_3 , e_1 \rangle}\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 =$$

$$e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

eli $t = 1$ ja

$$* (e_2 \wedge e_3) = e_1$$

Samoin

$$* (e_3 \wedge e_1) = e_2$$

$$* (e_1 \wedge e_2) = e_3$$

Siis

$$* d\omega = \nabla \times \omega$$

(iii) $* (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = 1$

□

Palaut. mieleen

$$\nabla \times E - ik H = 0$$

$$\nabla \times H + ik E = 0$$

$$k^2 = \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu \omega^2$$

Nyt

$$\nabla \times E = * dE \quad \text{ja}$$

$$\nabla \times H = * dH$$

joten Maxwell $\Longleftrightarrow$

$$* dE - ikH = 0$$

$$* dH + ikE = 0$$

Huom $\mathbb{R}^3$:ssa $** = I$:

$$**\omega = (-1)^{k(m-k)}\omega \quad , \text{kun } \omega \in \Lambda^k$$

mutta kun m on pariton on $k(m-k)$ parillinen $\forall\ k = 0, 1, \ldots, m$.

Määritellään vielä

$$\delta : C^\infty(\Omega, \Lambda^k) \to C^\infty(\Omega, \Lambda^{k-1})$$

$$\delta\omega = (-1)^{mk+m-1} * d * \omega$$

Erit. $\mathbb{R}^3$:ssa

$\delta\omega = * d * \omega$, kun ω on 0-muoto
tai ω on 2-muoto

$\delta\omega = -(* d * \omega)$, kun ω on 1-muoto
tai 3-muoto

6.7 Lemma Jos $\omega = \omega_I \, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$

niin
$$\delta \omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{\partial \omega_I}{\partial x_{i_j}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots e_{i_k}$$

Tod HT.

6.8 Lemma $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $w \in C^\infty(\Omega, \Lambda^k)$

(i) $\delta(f\omega) = f\,\delta\omega - df \vee \omega$

(ii) $d(f\omega) = f\,d\omega + df \wedge \omega$

Tod Osoit. ensin (ii)

Olk. $\omega = \omega_I e_I$, $|I| = k$

Nyt
$$d\omega = d\omega_I \wedge e_I \quad \text{ja}$$
$$d(f\omega) = d(f\omega_I) \wedge e_I$$
$$= \nabla(f\omega_I) \wedge e_I = (\omega_I\, df + f\, d\omega_I) \wedge e_I$$
$$= df \wedge \omega + f\, d\omega$$

(i) Olk. $a = nk + n - 1$, nyt
$$\delta(f\omega) = (-1)^a * d(* f\omega)$$
$$= (-1)^a * d(f(*\omega))$$

$$\overset{(ii)}{=} (-1)^{a} * \left(f\, d(*\omega) + df \wedge *\omega \right)$$

$$= f\,\delta\omega + \underbrace{(-1)^{a} * (df \wedge *\omega)}_{\overset{HT}{=}\ -df \vee \omega}$$

$\blacksquare$

Maxwell:

$$(1) \begin{cases} *dE - ikH = 0 \\ *dH + ikE = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$:ssa

$$*d = \delta *$$

sillä

$$\delta * \omega = (-1)^{nk+n-1} * d(\overset{\omega}{\overset{\shortparallel}{**\omega}})$$

$$= (-1)^{3(k+1)-1} * d\omega$$

$$= * d\omega$$

sillä $*\omega$ on 2-muoto $\Rightarrow k = 2$.

Nyt (1) $\Leftrightarrow$

$$*(dE - ik{*H}) = 0$$

$$\delta * H + ikE = 0$$

Merk. $\tilde{H} = *H$, jolloin (1)(=)

$$dE - ik\tilde{H} = 0$$
$$\delta\tilde{H} + ikE = 0$$

Sovellusten tulkinnassa

$$*H = \tilde{H} =$$

$$= H_1\, e_2\wedge e_3 + H_2\, e_1\wedge e_2 + H_3\, e_1\wedge e_2$$

on magneettikenttä ja merkitään sitä jatkossa H:lla. Tällöin Maxwellin yhtälöt homog. isotrooppisessa aineessa saavat muodon

$$dE - ikH = 0$$
$$\delta H + ikE = 0$$
$$dH = 0$$
$$\delta E = 0$$

missä E on 1-muoto ja H on 2-muoto.

Huom Ulkoinen algebra $\Lambda(V)$ ja Cliffordin algebra A_m ovat joukkoina samat. Clifford tulo ja ulkotulo ovat yleensä eri asia, mutta pätee

$$(1) \quad \alpha \wedge \omega = \Pi_{k+1}(\alpha\omega)$$

$$(2) \quad \alpha \vee \omega = -\Pi_{k-1}(\alpha\omega)$$

kun $\alpha \in \Lambda^1$ ja $\omega \in \Lambda^k$

Siksi $\alpha\omega = \alpha\wedge\omega - \alpha\vee\omega$

Näin ollen

$$e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2 - \overset{=0}{e_1 \vee e_2}$$
$$= e_1 \wedge e_2 \qquad \text{etc.} \ldots$$

Siis ulkoinen algebra oltaisiin voitu määritellä

$$\Lambda(V) = A_m$$

varust. (1):n määräämällä tulolla. ◁