3. Dirac-operaattori

3.1 Määr.

$$\partial f := \sum_{k=1}^{3} (\partial_k e_k) f \quad , \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

avoin

olk. $f = f_0 + f_V = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$.

Nyt

$$\partial f = \partial f_0 + \partial f_V .$$

Tässä

$$\partial f_0 = \sum_{k=1}^{3} (\partial_k f_0) e_k = \nabla f_0$$

f_0:n gradientti

ja

$$\partial f_V = (\partial_1 e_1 + \partial_2 e_2 + \partial_3 e_3)(f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3)$$

$$= \partial_1 f_1 \underbrace{e_1^2}_{=-1} + \partial_2 f_2 e_2^2 + \partial_3 f_3 e_3^2$$

$$+ (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) e_1 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) e_2 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) e_3$$

$$= - \nabla \cdot f_V + \nabla \times f_V$$

Olemme siis osoittaneet

<u>3.2 Lemma</u> Jos $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, niin

$$\partial f = -\nabla \cdot f_v + \nabla f_0 + \nabla \times f_v \,.$$

<u>3.3 Lemma</u>

$$\partial^2 = -\Delta$$

missä $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ on Laplacen operaattori.

<u>Tod</u>
$$\partial^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \partial_i \partial_k e_i e_k$$
$$= -\sum_{i=1}^{3} \partial_i \partial_i + \sum_{i \neq k} \partial_i \partial_k e_i e_k$$
$$= -\Delta + \nabla \times \nabla = -\Delta$$

(aivan samoin kuin $a_v \times a_v = -a_v \cdot a_v + a_v \times a_v$
$= -a_v \cdot a_v$, kun a_v on vektoriarvoinen)

$\square$

<u>3.4 Määr</u> Sanomme, että $f : \Omega \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ on (vasen) monogeeninen, jos
$$\partial f \equiv 0 \,.$$

3.5 Korollaari Jos $f = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ on monogeeninen, niin kaikki neljä funktiota $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, 3$ ovat harmonisia.

Tod

$$\bar\partial f = -\nabla \cdot f_V + \nabla f_0 + \nabla \times f_V = 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial \bar\partial f = -\Delta f = -\Delta f_0 - (\Delta f_1) e_1 - (\Delta f_2) e_2 - (\Delta f_3) e_3$$

$$= 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta f_1 = \Delta f_k = 0, \quad k = 1, \dots, 3.$$

$\square$

Huom $\quad \bar\partial f = 0 \quad \Leftrightarrow$

(3.1) $\quad \nabla \cdot f_V = 0 \quad$ ja

(3.2) $\quad \nabla f_0 + \nabla \times f_V = 0$

Systeemiä (3.1), (3.2) sanotaan Moisil-Theodoresco -systeemiksi.

3.6 Lause Jos $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, niin

$$\bar\partial(fg) = (\bar\partial f) g + \bar f \,\bar\partial g + 2\, \mathrm{sc}(f \bar\partial)(g),$$

missä $\mathrm{sc}(f \bar\partial) = -f_V \cdot \nabla$

Huom 1 $\mathrm{sc}(f\partial)(g) = -f_V \cdot \nabla g = -\sum_{k=1}^{3} f_k \partial_k g$

Huom 2 Jos $\mathrm{vec}(f) = f_V = 0$, eli $f = f_0$, niin

(3.3) $\partial(f_0 g) = (\partial f_0) g + f_0 \partial g$

Hence we get formally the following factorization for $\left(\partial + \frac{\nabla f_0}{f_0}\right)$:

(3.4) $\left(\partial + \frac{\nabla f_0}{f_0}\right) = f_0^{-1} \partial (f_0 g)$

Tod □

Määr. myös oikealta kertoja Dirac:

$$\partial_r f = \sum_{k=1}^{3} (\partial_k f) e_k .$$

Tällöin

(3.5) $\partial_r f = -\nabla \cdot f_V + \nabla f_0 - \nabla \times f_V$

4. Operaattori $\partial + \alpha I$

Olk. $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \alpha \geq 0$. Määr.

$$\partial_\alpha f = (\partial + \alpha I) f = \partial f + \alpha f .$$

Usein merk.

$$\partial + \alpha I = \partial + \alpha .$$

Operaattoria $\Delta + \alpha^2 I$ kutsutaan <u>Helmholtzin operaattoriksi</u>.

4.1 Lemma

$$\Delta + \alpha^2 = -\partial_\alpha \partial_{-\alpha} = -\partial_{-\alpha} \partial_\alpha$$

Tod

$$-\partial_\alpha \partial_{-\alpha} = -(\partial + \alpha)(\partial - \alpha)$$

$$= -\partial^2 - \alpha\partial + \alpha\partial + \alpha^2 = -\partial^2 + \alpha^2$$

$$= \Delta + \alpha^2 \qquad \square$$

Huom Jos $\partial_\alpha f = 0$ tai $\partial_{-\alpha} = 0$, niin f:n komponentit ovat Helmholtzin yhtälön ratkaisuja.

<u>Perusratkaisu</u>: Olk. $\Psi : \Omega \to \mathbb{C}$ skalaarifunktio. Sanomme, että Ψ on operaattorin $\Delta + \alpha$ perusratkaisu, jos

(4.1) $$(\Delta + \alpha^2)\Psi = \delta,$$

missä δ on Diracin funktio (distribuutio).

Jos distribuutioteoria (ks. Rudin, FA) ei ole tuttu, niin (4.1) voidaan kirjoittaa ekvivalentissa muodossa:

(4.2) $$\langle (\Delta + k^2)\varphi, \Psi \rangle := \int (\Delta + k^2)\varphi(x)\Psi(x)\,dx = \varphi(0)$$

Palautetaan mieleen konvoluutio ja sen perusominaisuudet:

$$\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$\varphi * \psi(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy$$

Pätee: $$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g)$$

kaikille multi-indekseille α.

<u>Huom</u> Jos $\varphi \in C_0^\infty$, niin

$$\varphi * f$$

on määritelty $\forall f \in \mathcal{D}' = \{\text{distribuutiot}\}$.

Nyt jos ϕ on $\Delta+\alpha$:n perusratkaisu, niin yht

$$(\Delta+\alpha^2)f = g$$

(yks) ratkaisu f saadaan kaavalla

$$f = g * \phi$$

<u>Tod</u> $(\Delta+\alpha^2)f = (\Delta+\alpha^2)(\phi * g)$

$$= ((\Delta+\alpha^2)\phi) * g = \delta * g = g$$

$\blacksquare$

<u>Huom 1</u> Yleisesti $f*\varphi$ on hyvin määritelty, kun $f \in \mathcal{D}' = \{\text{distribuutiot } \mathbb{R}^n\text{:ssä}\}$ ja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja erit. $\delta * \varphi = \varphi$

joten perusratkaisujen distribuutiokäsittely esitetään täsmällisemmin myöhemmin kursseilla

<u>Huom 2</u> δ-distribuutio määritellään

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$ ja merk. formaalisti

$$\int \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$

Näin ollen (edellisen formalismin)

$$\delta * f(x) = \int \delta(x-y)\, f(y)\, dy$$
$$= \int \delta(y)\, f(x-y)\, dy = \langle \delta, f_x \rangle = f_x(0)$$
$$= f(x),$$

kun $f_x(y) = f(x-y)$.

Etsitään nyt perusratkaisu Diracille!

<u>4.2 Lemma</u> Funktio $K_0 = -\gamma \phi_0$ on Diracin yhtälön perusratkaisu s.o.

(4.3) $$\gamma K_0 = \delta$$

<u>Huom1</u> $\phi_0(x) = -\dfrac{1}{4\pi |x|} \in L^1_{loc}$ ja

$$\partial_i \phi_0(x) = \frac{x_i}{4\pi |x|^3} \in L^1_{loc},$$

joten K:n komponentit ovat lokaalisti integroituvia funktioita

<u>Huom2</u> K_0 on $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-arvoinen funktio, mutta γK_0 on skalaari (distribuutio)

Ehto (4.3) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{\partial} K_0 = \delta e_0 .$$

<u>Lemman 4.2 tod:</u>

$$\bar{\partial} K_0 = \bar{\partial}(-\partial \phi_0) = \Delta \phi_0 = \delta \qquad \square$$

Samoin todistetaan:

<u>4.3 Lemma</u> $K_\alpha = -\bar{\partial}_{-\alpha} \phi_\alpha$ on ∂_α:n perusratkaisu eli

$$\partial_\alpha K_\alpha = \delta$$

<u>Tod</u> $\square$

<u>4.4 Lemma</u>

$$K_\alpha = \left(\alpha + \frac{x}{|x|^2} - i\alpha \frac{x}{|x|}\right) \phi_\alpha(x) ,$$

missä

$$x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$$

5. Integraaliesityksiä kvaternioille

Palaut. mieleen Gaussin divergenssilause:

(5.1) $$\int_\Omega \nabla\cdot F\,dx = \int_{\partial\Omega} F\cdot\nu\,ds$$

missä ν on sileän alueen Ω yksikkö-ulkonormaali. Valitsemalla $F = gf e_i$ saadaan

(5.2) $$\int_\Omega g\partial_i f\,dx = \int_{\partial\Omega} f\nu_i\,ds - \int_\Omega (\partial_i g) f\,dx$$

5.2 Lause (Stokes kvaternioille). Jos $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{H}(\mathbb{C})) \cap C(\bar\Omega; \mathbb{H}(\mathbb{C}))$, niin

$$\int_\Omega \big((\partial_r f) g + f\partial g\big)\,dx = \int_{\partial\Omega} f\nu g\,ds ,$$

missä $\nu(x) = \sum_i \nu_i e_i \in \mathbb{H}$.

Tod.
$$\int_\Omega (\partial_r f g + f\partial g) = \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \partial_i f e_i g + f e_i \partial_i g)$$

$$\overset{(5.2)}{\underset{(*)}{=}} \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega} f\nu_i e_i g\,ds = \int_{\partial\Omega} f\nu g\,ds$$

□

(*) Jos ei ole, katso komponenteittain f:n ja g:n suhteen.
Tästä lähtien kaikki funktiot $\mathbb{H}(F)$ arvoisia.

<u>5.2 Seuraus</u> Jos $g \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, niin

$$\int_{\Omega} \partial g = \int_{\partial\Omega} \nu g \, ds$$

<u>Tod</u> Valitse $f \equiv 1$ ja sovella 5.1:tä. □

Myös käänteinen pätee. Tarvitsemme

<u>5.3 Määr</u> Pinta $\partial\Omega$ on Liapunov, jos sen ulkonormaali on Hölder jollakin $0 < \alpha \leq 1$

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}$$

<u>5.3 Lause</u> Olk. $g \in C^1(\Omega)$ s.e. $\partial_\alpha g \in L^p$, jollakin $1 < p \leq \infty$. Jos kaikille Liapunov pinnoille $\Omega_1 \subset \Omega$ pätee

$$\int_{\partial\Omega_1} \nu g \, ds = -\alpha \int_{\Omega_1} g ,$$

niin $\partial_\alpha g \equiv 0$ alueessa Ω.

Tod Todistus sivuutetaan tässä vaiheessa.

□

Huom Lauseketta 5.3 kutsutaan Moreran lauseeksi kvaternioille. Erit. jos $\alpha = 0$ se void. kirjoittaa muotoon

$$\bar{\partial} g = 0 \quad \Omega\text{:ssa} \iff \int_{\partial\Omega_1} \nu g \, ds = 0 \quad \forall\, \Omega_1 \subset \Omega .$$