LUENNOT 2 81 –

Aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt

Aikariippuvuus muotoa $e^{-i\omega t}$:

$$E(x,t) = \mathrm{Re}\,(E(x)\,e^{-i\omega t})$$

$$H(x,t) = \mathrm{Re}\,(H(x)\,e^{-i\omega t})$$

Tässä $E(x) \in \mathbb{C}^3$ ja $H(x) \in \mathbb{C}^3$.

Maxwellin yht. (9.1) – (9.4) saavat nyt muodon

$$\text{(9.12)} \qquad \nabla \times H = -i\omega\varepsilon E + j$$

$$\text{(9.13)} \qquad \nabla \times E = i\omega\mu H$$

$$\text{(9.14)} \qquad \nabla \cdot E = \rho/\varepsilon$$

$$\text{(9.15)} \qquad \nabla \cdot H = 0$$

Huom 1 (9.12) ja (9.14) implikoivat

$$\text{(9.16)} \qquad \nabla \cdot j = i\omega\rho$$

Huom 2 oletukset ovat edelleen

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H$$

ja ε, μ ovat vakioita ja skalaareja.

Ohmin laki muodossa

$$j = \sigma E + j_0$$

missä σ on sähkönjohtavuus ja j_0 on ns. ulkoinen virta.

Nyt (9.12) voidaan kirjoittaa muodossa

$$(9.12)' \quad \nabla \times H = (-i\omega\varepsilon + \sigma)E + j_0$$

$$= -i\omega\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}\right)E + j_0 .$$

Merkitsemme tästä lähtien j_0:aa j:llä, mutta sallimme ε:lle kompleksisia arvoja, joille

$$\operatorname{Im} \varepsilon = \frac{\sigma}{\omega} \geq 0 .$$

Näillä oletuksilla (9.12) pätee siten, että j on ulkoinen virta (ja ε kompleksinen).

Merk. vastaavasti

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c}$$

missä neliöjuuren haara on taas valittu siten, että

$$\operatorname{Im} \alpha \geq 0$$

9.2 Lause Maxwellin yhtälöt (9.12) – (9.15) voidaan kirjoittaa muodossa

$$(9.17) \qquad \not{\partial} E = i\omega\mu H - \rho/\varepsilon$$

$$(9.18) \qquad \not{\partial} H = -i\omega\varepsilon E + j$$

Tod Nyt (9.17) $\iff$

$$\nabla \times E - \nabla \cdot E = i\omega\mu H - \rho/\varepsilon$$

ottamalla vektoriosa

$$\nabla \times E = i\omega\mu H$$

ja ottamalla skalaariosan

$$\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon .$$

Tämä osoittaa, että (9.17) $\iff$ (9.13) & (9.14)

Loppu on HT. $\square$

Stratton – Chu – kaavat

Tarkoitus on seuraavaksi johtaa kuuluisat Stratton – Chu – esitykset E:lle ja H:lle diagonalisoimalla Maxwellin yhtälöt $\not{\partial}$:n avulla

Olk.

$$\varphi = -i\omega\varepsilon E + \alpha H \quad \text{ja}$$

$$\psi = i\omega\varepsilon E + \alpha H$$

Nyt pätee

9.3 Lemma

$$(9.19) \qquad (\partial - \alpha)\varphi = \nabla\cdot j + \alpha j$$

$$(9.20) \qquad (\partial + \alpha)\psi = -\nabla\cdot j + \alpha j$$

Tod. Todistetaan vain ensimmäinen väite. Nyt (9.17) ja (9.18) $\Rightarrow$

$$\partial\varphi = -i\omega\varepsilon\,\partial E + \alpha\,\partial H$$

$$= -i\omega\varepsilon\left(i\omega\mu H - \rho/\varepsilon\right) + \alpha\left(-i\omega\varepsilon E + j\right)$$

$$= \alpha^2 H + i\omega\rho - i\omega\varepsilon\alpha E + \alpha j$$

$$= \alpha\left(\alpha H - i\omega\varepsilon E\right) + i\omega\rho + \alpha j$$

$$= \alpha\varphi \underset{\overset{\|}{+\nabla\cdot j}}{+ i\omega\rho} + \alpha j \qquad \square$$

Määrittelemällä matriisi

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} -i\omega\varepsilon & \alpha \\ i\omega\varepsilon & \alpha \end{pmatrix}$$

saadaan

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = B_\alpha \begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}$$

ja $$B_\alpha^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1/i\omega\varepsilon & 1/i\omega\varepsilon \\ 1/\alpha & 1/\alpha \end{pmatrix}$$

jolloin helposti nähdään, että

$$\begin{pmatrix} \gamma & -i\omega\mu \\ i\omega\varepsilon & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix} = B_\alpha^{-1}\begin{pmatrix}\gamma-\alpha & 0 \\ 0 & \gamma+\alpha\end{pmatrix} B_\alpha \begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}$$

Tästä seuraa

9.4 <u>Lause</u> Yhtälöt (9.14) ja (9.20) ovat ekvivalentteja Maxwellin yhtälöiden (9.12) – (9.15) kanssa.

9.5 <u>Lause</u> – (Stratton–Shu–esitys kaavat) Maxwellin yhtälöiden (9.12) – (9.15) ratkaisut E ja H alueessa Ω toteuttavat

(9.21)
$$\left\{\begin{aligned} E(x) = {} & \\ & \int_\Omega \left\{\frac{1}{i\omega\varepsilon}\nabla\phi_\alpha(x-y)\,\nabla\cdot j - i\omega\mu\,\phi(x-y)\,j(y)\right\} dy \\ & + \int_{\partial\Omega}\Big\{\frac{\partial}{\partial\nu_x}\phi_\alpha(x-y)\,E(y) + \big(\nabla\phi_\alpha(x-y)\wedge\nu(y)\big)\wedge E(y) \\ & \qquad + i\omega\mu\,\phi_\alpha(x-y)\big(n(y)\wedge H(y)\big)\Big\}\, ds(y) \end{aligned}\right.$$

ja

$$(9.22)\quad \begin{cases} H(x) = \int_{\Omega} \nabla \phi_\alpha (x-y) \wedge j(y)\, dy \; + \\ \int_{\partial\Omega} \Big\{ -\frac{\partial}{\partial \nu_x} \phi_\alpha (x-y) H(y) + \nabla \phi_\alpha (x-y) \wedge n(y)\, H(y) \\ \quad + \int_{\partial\Omega} i\omega\varepsilon\, \phi_\alpha (x-y)\, n(y) \times E(y) \Big\}\, d_s(y) \end{cases}$$

Tarvitsemme pari lemmaa

9.6 Lemma Vektorikenttät φ ja ψ (ψ) toteuttavat Ω:ssa eri tyyppiset

$$(9.23)\quad \begin{cases} \varphi = T_{-\alpha}(\nabla \cdot j + \alpha j) + K_{-\alpha}\varphi \\ \psi = T_\alpha (\nabla \cdot j + \alpha j) + K_\alpha \psi \end{cases}$$

Tod. Palautet. mieleen Borell – Pompeiu:

$$f(x) = K_\alpha f(x) + T_\alpha \partial_\alpha f(x), \quad x \in \Omega$$

Nyt $\partial_{-\alpha} \varphi = \nabla \cdot j + \alpha j$, joten

$$\varphi(x) = K_{-\alpha}\varphi + T_{-\alpha}(\nabla \cdot j + \alpha j)$$

Vast. ψ:lle.

$\square$

9.7 Seuraus E ja H toteuttavat Ω:ssa esityskaavat

(9.24) $$E = \frac{1}{2i\omega\varepsilon}\Big(i\omega\varepsilon(K_\alpha + K_{-\alpha})E + \alpha(K_\alpha - K_{-\alpha})H$$
$$- (T_\alpha + T_{-\alpha})\nabla\cdot j + \alpha(T_\alpha - T_{-\alpha})j \Big)$$

(9.25) $$H =$$
$$\frac{1}{2\alpha}\Big(\alpha(K_\alpha + K_{-\alpha})H + i\omega\varepsilon(K_\alpha - K_{-\alpha})E$$
$$- (T_\alpha - T_{-\alpha})\nabla\cdot j + \alpha(T_\alpha + T_{-\alpha})j \Big)$$

Tod Sij.

$$\varphi = -i\omega\varepsilon E + \alpha H$$
$$\psi = i\omega\varepsilon H + \alpha H$$

esityskaavoihin (9.13) saadaan

$$-i\omega\varepsilon E + \alpha H = T_{-\alpha}(\nabla\cdot j + \alpha j) + K_{-\alpha}(-i\omega\varepsilon E + \alpha H)$$
$$i\omega\varepsilon E + \alpha H = T_\alpha(-\nabla\cdot j + \alpha j) + K_\alpha(i\omega\varepsilon E + \alpha H)$$

Väite seuraa laskemalla yhteen ja vähentämällä.

$\square$

Varianti aggiunte (HT)

$$(K_\alpha + K_{-\alpha}) f(x) =$$

$$= 2 \int_{\partial\Omega} - \Big\{ \nabla_x \phi(x-y) \times \nu(y) \cdot f(y) - \frac{\partial}{\partial \nu} \phi(x-y) f(y)$$

$$+ \big(\nabla \phi(x-y) \times \nu(y)\big) \times f(y) \Big\} \, ds(y)$$

$$(K_\alpha - K_{-\alpha}) f(x) =$$

$$= 2\alpha \int_{\partial\Omega} \big(\phi(x-y)\, \nu \cdot f(y) - \phi(x-y)\, \nu \times f(y)\big) \, ds(y)$$

Varianti

$$(T_\alpha + T_{-\alpha}) f_0(x) = -2 \int_\Omega \nabla \phi(x-y) f_0(y) \, dy$$

$$(T_\alpha - T_{-\alpha}) f_0(x) = 2\alpha \int_\Omega \phi(x-y) f_0(y) \, dy$$

$$(T_\alpha + T_{-\alpha}) f_v(x) =$$

$$= 2 \int_\Omega \big\{ \nabla \phi(x-y) \cdot f_v(y) - \nabla \phi(x-y) \wedge f(y) \big\} \, dy$$

$$(T_\alpha - T_{-\alpha}) f_v(x) =$$

$$= 2\alpha \int_\Omega \phi(x-y) f(y) \, dy$$

Sijoittamalla nämä termit (9.24):ään ja (9.25):een ja ottamalla vektoriosan väite seuraa

$\square$