ANALYYSI KVATERNIOILLA JA CLIFFORDIN ALGEBROISSA

LASSI PÄIVÄRINTA

2006 - 2007

1. KVATERNIOT

$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$

kommut. kunta (algebra)

- imaginaariyksikkö i
- tulo, $i^2 = -1$

Kompleksianalyysi, Cauchyn lause/kaava etc.

Voiko tämän yleistää fysikaaliseen maailmaan $\mathbb{R}^3$:een?

Ristitulo $u \times v$?

- Ei kommutatiivinen
- Ei assosiatiivinen
- Ei yksikköelementtiä

Ei vastaa kompleksitasoa

W.R. Hamilton 1843:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$$

$$q \in \mathbb{H} \iff q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$

$\mathbb{H}$ on vektoriavaruus luonnollisella tavalla. Määritellään $\mathbb{H}$:hon myös tulo asettamalla

(1.1) $\quad e_0^2 = 1, \quad e_1^2 = -1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = -1$

(1.2) $\quad e_1 \cdot e_2 = e_3 = -e_2 \cdot e_1$ $\qquad$ (1.4b) $\quad e_j e_0 = e_0 e_j = e_j$

(1.3) $\quad e_2 \cdot e_3 = e_1 = -e_3 \cdot e_2$

(1.4) $\quad e_3 \cdot e_1 = e_2 = -e_1 \cdot e_3$

Vaatimalla assosiatiivisuus (1.1)–(1.4b) määrittelee tulon kahden mielivalt. $\mathbb{H}$:n alkion välillä.

<u>Merkintöjä ja nimityksiä</u>

Jatkossa merk. $\boxed{e_0 = 1}$

$\mathbb{H}$:n alkioita kutsutaan kvaternioiksi.

Jos $q = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ niin lukua q_0 kutsutaan q:n skalaariosaksi ja merk

$$q_0 = sc(q).$$

Vektoria $q_v := q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$ sanotaan q:n vektoriosaksi ja merk

$$q_v := vec(q).$$

1.1 Lemma Jos $q = q_0 + q_v$ ja $p = p_0 + p_v$, niin

(1.5) $$qp = q_0 p_0 - q_v \cdot p_v + q_0 p_v + p_0 q_v + q_v \times p_v$$

Erityisesti

(1.6) $$sc(qp) = q_0 p_0 - q_v \cdot p_v \quad \text{ja}$$

(1.7) $$vec(qp) = q_0 p_v + p_0 q_v + q_v \times p_v$$

Vektorit $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{H}$ vastaavat imaginaariyksikköä $i \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow$

1.2 Määr. Kvaternion q konjugaatti q^* määritellään

$$q = q_0 + q_v \Leftrightarrow q^* = q_0 - q_v .$$

1.3 Lemma

(i) $$q q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 =: |q|^2$$

(ii) Jos $q \neq 0$, niin q on kääntyvä ja
$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} .$$

(iii) $$(pq)^* = q^* p^*$$

1.4 Lemma Pätee

(i) $$p(qr) = (pq)r$$

(ii) $$|pq| = |p|\,|q|$$

2. Kompleksiset kvaterniot $\mathbb{H}(\mathbb{C})$

$$q \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) \iff$$
$$q = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$
missä $q_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Ehtojen (1.1)–(1.4b) lisäksi vaaditaan

(2.1) $i e_k = e_k i$, $k = 1, 2, 3$.

Siis i kommutoi kvaterniokantavektoreiden kanssa. Jos taas (2.1) korvataan antikommut. ehdolla

(2.2) $i e_k = - e_k i$, $k = 1, 2, 3$.

Tällä struktuurilla varustettua $\mathbb{C}^4$:ää kutsutaan oktonioalgebraksi. Tällä kurssilla oletetaan kuitenkin aina ehto (2.1).

Jokainen $q \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$q = \mathrm{Re}\, q + i\, \mathrm{Im}\, q$$

missä

$$\operatorname{Re} q = \sum_{k=0}^{3} (\operatorname{Re} q_k) e_k$$

$$\operatorname{Im} q = \sum_{k=0}^{3} (\operatorname{Im} q_k) e_k$$

Esim. Olk. $q = 1 + i e_1$. Tällöin $q^* = 1 - i e_1$ ja

$$q q^* = (1 + i e_1)(1 - i e_1)$$
$$= 1 - i e_1 i e_1 = 1 - i^2 e_1^2 = 1 - 1 = 0$$

2.1 Määr. $a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ on nollanjakaja, jos

(i) $a \neq 0$

(ii) $\exists\, b \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ s.e. $b \neq 0$ ja $ab = 0$

$\mathbb{H}(\mathbb{C})$:n nollanjakajien joukkoa merk. $\mathcal{G}$:llä.

2.2 Lemma Jos $a \in \mathcal{G}$, niin a ei ole kääntyvä.

(7)

<u>Tod</u> Jos $a \in G$ ja $\exists\, a^{-1}$, niin $\exists\, b \neq 0$ s.e. $ab = 0$. Kerrotaan tämä vasemmalta a^{-1}:llä:

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$$

↯ $\square$

<u>2.3 Lemma</u> Olet. että $a \in H(\mathbb{C})$ ja $a \neq 0$. Tällöin SEY

(i) $a \in G$

(ii) $aa^* = 0$

(iii) $a_0^2 = a_v^2$

(iv) $a^2 = 2a_0 a = 2a_v a$

<u>Tod</u> (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Selvästi (ii) $\Rightarrow$ (i). Olet. sitten että (ii) ei päde. Siis

$$aa^* \neq 0.$$

Nyt

$$aa^* = a_0^2 - a_v a_v \in \mathbb{C},$$

Ant.

$$b = \frac{a^*}{aa^*}$$, jolloin

⑧

$$ba = \frac{a^*}{aa^*}\,a = \frac{a^*a}{aa^*} = 1 \quad \text{ja}$$

$$ab = a\,\frac{a^*}{aa^*} = \frac{aa^*}{aa^*} = 1$$

eli a on kääntyvä. Lemma 2.2 $\Rightarrow$
$a \notin G$.

Osoit. seuraavaksi (ii) $\Leftrightarrow$ (iii):

Nyt

$$aa^* = 0 \Leftrightarrow \overbrace{(a_0+a_v)(a_0-a_v)}^{=0} \Leftrightarrow a_0^2 + a_v \cdot a_v = 0$$

Osoit. lopuksi (iii) $\Leftrightarrow$ (iv):

$$a^2 = a_0^2 + 2a_0a_v - a_v \cdot a_v$$

Thus

$$a_0^2 = a_v^2 = -a_v \cdot a_v \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2(a_v^2 + a_0a_v) = 2a_va \\ a^2 = 2(a_0^2 + a_0a_v) = 2a_0a \end{cases}$$

$\square$

<u>Huom</u> Olet. että $a \in G$ ja $a_0 \neq 0$.
Olk. $c = \dfrac{a}{2a_0}$. Tällöin c on

<u>idempotentti</u> s.o. $c^2 = c$:

<u>Tod</u> $c^2 = \dfrac{a^2}{4a_0^2} \overset{(iv)}{=} \dfrac{2a_0a}{4a_0^2} = \dfrac{a}{2a_0} = c$

$\square$

9

Määr. $H(\mathbb{C})$:hen normi

$$|q|_c := \sqrt{|q_0|^2+|q_1|^2+|q_2|^2+|q_3|^2}$$

Yleisesti $|pq|_c \neq |p|_c |q|_c$

<u>Esim</u> Olk. $p = q = 1+ie_1$.

Nyt

$$pq = (1+ie_1)(1+ie_1) = 1+2ie_1+(ie_1)^2$$
$$= 2(1+ie_1)$$

Siis

$$|pq|_c = 2\,|1+ie_1|_c = 2\sqrt{2}$$

Toisaalta

$$|p|_c = |q|_c = |1+ie_1| = \sqrt{2}$$

jolloin

$$|p|_c |q|_c = 2$$

2.4 Lemma

$$|pq|_c \le \sqrt{2}\,|p|_c\,|q|_c$$

Tod Olk. $a = \mathrm{Re}\,p$, $b = \mathrm{Im}\,p$, $c = \mathrm{Re}\,q$

ja $d = \mathrm{Im}\,q$. Nyt

$$|p\cdot q|_c^2 = |(a+ib)(c+id)|_c^2$$

$$= |ac - bd + i(bc+ad)|_c^2$$

$$= |ac-bd|^2 + |bc+ad|^2$$

Koska $|ac-bc|$ on $\mathbb{R}^4$:n tavallinen

normi saadaan

$$|p\cdot q|_c \le 2\left(|ac|^2+|bd|^2+|bc|^2+|ad|^2\right)$$

$$= 2\left(|a|^2|c|^2+|b|^2|d|^2+|b|^2|c|^2+|a|^2|d|^2\right)$$

$$= 2\left(|a|^2+|b|^2\right)\left(|c|^2+|d|^2\right) = 2|p|_c^2\,|q|_c^2$$

□