# KLUENNOT 7

Palaut mieleen

$$\mathcal{C}_k f(x) = -\int_{\partial\Omega} E_k(x-y)\, n(y)\, f(y)\, dy$$

$x \in \Omega_\pm$ $\quad \Omega_+ = \Omega$ ja $\Omega_- = \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$.

ja reunaoperaattori

$$H_k f(x_0) = -2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x_0-y|>\varepsilon} E_k(x_0-y)\, n(y)\, f(y)\, dS(y)$$

**5.5 Lause** (Plemelj–Sokhotskiin kaavat)

Jos $f \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega, \mathcal{A}_{m+1})$, niin

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega_\pm}} \mathcal{C}_k f(x) = \frac{1}{2}\left(\pm f(x_0) + H_k f(x_0)\right)$$

Tod. HT

# DIRICHLET'N ONGELMA

Olk. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu $C^2$-alue.

**5.6 Lause** Olk. $f \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega, \mathcal{A}_{n+1})$

(i) $f$ void. jatkaa yht. $\partial_L f = 0$ $C^1$-ratk. $F$ alueeseen $\Omega$, jos

$$H_n f = f$$

(ii) $f$ void jatkaa yht. $\partial_L f = 0$ $C^1$-ratk alueeseen $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, jos

$$H_n f = -f$$

Tod Osoit. (i): "$\Rightarrow$"

Jos $F$ tod.

(1) $\partial_L F = 0$ $\Omega$:ssa

(2) $F|_{\partial\Omega} = f$

niin aikaisemmin osoit. esityslauseen nojalla

$$F(x) = C_n f(x), \quad x \in \Omega.$$

Lisäksi Plemelj - Sokhotskyin kaava

$\Rightarrow$
$$F(x) \longrightarrow \frac{1}{2}\left( f(x_0) + H_k f(x_0)\right)$$

kun $\quad x \longrightarrow x_0 \in \partial\Omega$

Siis
$$f(x_0) = \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} H_k f(x_0)$$

pätee $\quad \forall\, x_0 \in \partial\Omega \quad$ eli

(1) $$H_k f = f$$

Vastaavasti, jos (1) pätee niin
$$F(x) = \mathcal{C}_k f(x), \quad \text{kun } x \in \Omega$$

Nyt $\quad \mathcal{D}_k F = 0 \quad$ alueessa $\Omega$ ja

kun $\quad x \to x_0 \in \partial\Omega$
$$F(x) = \mathcal{C}_k f(x) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(f(x_0) + H f(x_0)\right)$$
$$\overset{(1)}{=} f(x_0)$$

$\square$

**5.7 Lause**
$$H_k^2 = I \qquad \text{avaruudessa } C^{0,\alpha}$$

**Tod.** Olk. $\; f \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$. Asetetaan

$$f_+(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} C_L f(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f(x_0) + H_L f(x_0)\Big) =: P_L f(x_0)$$

$$f_-(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega^-}} f(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f(x_0) - H_L f(x_0)\Big) =: Q_L f(x_0)$$

Ed. lauseen nojalla

$$H_L f_+ = f_+ \iff H_L(f + H_L f) = f + H_L f$$

$$\iff H_L^2 f = f \qquad \square$$

5.8 Seuraus (i) $P_L^2 = P_L$, (ii) $Q_L^2 = Q_L$,

(iii) $P_L + Q_L = I$,

(iv) $P_L - Q_L = H_L$ ja

(v) $P_L Q_L = 0$

Tad

$$P_k = \frac{1}{2}(I + H_k),$$

$$Q_k = \frac{1}{2}(I - H_k)$$

Ngt

$$P_k^2 = \frac{1}{4}(I + H_k + H_k + H_k^2)$$

$$= \frac{1}{2}(I + H_k) = P_k,$$

$$P_k Q_k = \frac{1}{2}(I + H_k)\frac{1}{2}(I - H_k)$$

$$= \frac{1}{4}(I - H_k^2) = 0,$$

Munt terlihat samaan

# 6. MAXWELLIN YHTÄLÖT

$$\nabla \cdot D(x,t) = \rho(x,t)$$

$$\nabla \cdot B(x,t) = 0$$

$$\nabla \times E(x,t) + \frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times H(x,t) - \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} = J(x,t)$$

$E, H$ ovat sähkö- ja magneettikenttä

$D, B$ ovat sähkö- ja magneettivuo

$\rho, J$ ovat varaus- ja virrantiheys

Rakenneyhtälöt:

$$D(x,t) = \varepsilon \, E(x,t)$$

$$B(x,t) = \mu \, H(x,t)$$

$$J(x,t) = \sigma \, E(x,t)$$

Tutkitaan tapausta $\sigma \equiv 0$

Aikaharmoninen tapaus + $\varepsilon, \mu, \sigma$ vakioita s.o.

$$E(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}\right)^{-1/2} E(x)\, e^{-i\omega t} \right\}$$

$$H(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ \mu^{-1/2} H(x)\, e^{-i\omega t} \right\}$$

$$\begin{cases} \nabla \times E = ik H \\ \nabla \times H = -ik E \\ \nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0 \end{cases}$$

Luonnollinen kysymys: Voidaanko tämä yleistää $\mathbb{R}^n$:ään?

Vast. Voidaan, kun $E$ ja $H$ esitetään differentiaalimuotojen avulla.

## 6.1 DIFFERENTIAALIMUODOT $\mathbb{R}^m$:n ALUEISSA

Käyt. $\mathbb{R}^n$:lle merk. $V$ ja tark. Grassmannin algebraa

$$\Lambda = \bigoplus_{k=0}^{m} \Lambda^k(V)$$

<u>Huom</u> $\Lambda^1(V) \simeq \mathbb{R}^m$

<u>6.1 Määr.</u> Oll. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Differentiaali $k$-muoto on $C^\infty$-kuvaus

$$\omega : \Omega \to \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$$

Kaikkien tällaisten k-muotojen avaruudelle käytetään merkintää

$$C^\infty(\Omega, \Lambda^k)$$

ja $\omega \in C^\infty(\Omega, \Lambda^k)$, niin

$$\omega(x) = \sum_{|I|=k} \omega_I(x)\, \varepsilon_I$$

missä $\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_k}$

ja $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ on $\Lambda^1$:n ON-kanta.

## ULKOINEN DERIVAATTA

**6.2 Lemma** Kaikille $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\exists!$ operaattori

$$d : C^\infty(\Omega, \Lambda^k) \to C^\infty(\Omega, \Lambda^{k+1})$$

s.e.

(i) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$

(ii) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$

kun $\omega$ on k-muoto.

(iii) $d \circ d = 0$

(iv) $df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_i$, kun $f$ on 0-muoto.

Tod Kohta (ii) $\Rightarrow$

$$d\varepsilon_I = d(1\wedge\varepsilon_I) =$$

$$d1\wedge\varepsilon_I - 1\wedge d\varepsilon_I \overset{(iv)}{=} -d\varepsilon_I$$

Siis

$$d\varepsilon_I = 0.$$

Jos $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I\,\varepsilon_I$, niin (ii) $\Rightarrow$

(*) $$d\omega = \sum_{|I|=k} d\omega_I\wedge\varepsilon_I.$$

Siis (*):n antama määritelmä on ainoa mahdollinen. On helppo nähdä, että se toteuttaa myös vaaditut ominaisuudet.

$\square$

Esim 6.3 Avaruudessa $\mathbb{R}^3$:

(1) Jos $f\in C^\infty(\Omega,\Lambda^0)$, niin

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\varepsilon_3 = \nabla f$$

mikä on vektorikenttä eli 1-muoto

(2) Jos $\omega\in C^\infty(\Omega,\Lambda^1)$,

$$\omega = \omega_1\varepsilon_1 + \omega_2\varepsilon_2 + \omega_3 e_3$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right) \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 +$$

$$+ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}\right) \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right) \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$$

(3) Jos $\tau \in C^\infty(\Omega, \Lambda^2)$, eli

$$\tau = \tau_1 \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 + \tau_2 \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1 + \tau_3 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$$

niin

$$d\tau = \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x_3}\right) \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3$$

<u>Huom</u> $\Lambda^2$ on 3-ulotteinen ja $\Lambda^3$ on 1-ulotteinen avar., joiden kannat ovat $\{\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3, \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_1, \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2\}$ ja $\{\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3\}$. Kohtien (2) ja (3) nojalla, 1-muodon ulk. derivaatta 'on roottori' ja 2-muodon ulk. derivaatta 'on divergenssi'. Tarkemmin tämän voi esittää Hodgen $*$-oper. avulla