Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi kvaternioilla ja Cliffordin algebroissa
Ratkaisuehdotuksia harjoitukseen 6

Seuraavissa $\Gamma = \partial\Omega$.

1. **Dirichlet'n ongelmat ja hyppyongelmat**:
Ongelma 1: Olkoon $g \in C^{0,\varepsilon}(\Gamma)$. Lausee 7.3. kohdan (1) nojalla $f = K_\alpha g$ toteuttaa Ongelman 1 jos ja vain jos $g = P_\alpha g$. Lisäksi ratkaisu on yksikäsitteinen, mikä havaitaan seuraavasti. Olkoon $\widetilde{f}$ toinen ongelman ratkaisu. Tällöin Cauchyn kaavan nojalla $K_\alpha g = \widetilde{f}$ alueessa Ω^+ ja siis

$$f - \widetilde{f} = K_\alpha g - K_\alpha g = 0.$$

Ongelma 2: Kuten ongelmassa 1 havaitsemme, että ratkaisu on olemassa ja yksikäsitteinen (kun oletamme radiaatioehdon (6.4)) kun $g = Q_\alpha g$ ja $f = -K_\alpha g$. Ilman radiaatioehtoa (tai vaihtamalla radiaatioehdon toiseksi) voimme löytää muitakin ratkaisuja, joten oletamme nyt että radiaatioehto (6.4) on voimassa (kuten varmaankin oli tarkoitus).
Ongelma 3: Kirjoitetaan nyt $g = Ig = (P_\alpha + Q_\alpha)g$. Ongelmien 1 ja 2 avulla havaitsemme, että jos valitsemme $f^+ = K_\alpha P_\alpha g$ ja $f^- = K_\alpha Q_\alpha g$, niin $f^\pm \in \ker \bar{\partial}_\alpha(\Omega^\pm)$ ja

$$(f^+ - f^-)|\Gamma = P_\alpha g - (-Q_\alpha g) = g,$$

joten olemme löytäneet ainakin erään ratkaisun. Koska ratkaisut ovat yksikäsitteisiä, niin tämäkin ratkaisu on yksikäsitteinen.

2. **Dirichlet'n ongelma pelkällä reaalidatalla (piti olla skalaariosalla...)**:
Merkitään $f = f_0 + f_V$. Oikea tehtävä olisi ollut

$$\begin{cases} \bar{\partial}_\alpha f = 0 & \text{alueessa } \Omega, \\ \mathrm{sc}(f) = f_0 = g & \text{reunalla } \Gamma. \end{cases}$$

Nyt $\bar{\partial}_\alpha f = -\nabla \cdot f_V + \nabla f_0 + \nabla \times f_V$, joten yhtälö on sama kuin

$$\begin{cases} \alpha f_0 - \nabla \cdot f_V = 0 & \text{alueessa } \Omega, \\ \alpha f_V + \nabla f_0 + \nabla \times f_V = 0 & \text{alueessa } \Omega, \\ f_0 = g & \text{reunalla } \Gamma. \end{cases}$$

Jos $f_V = \nabla u$ jollakin skalaarifunktiolla $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, niin $\nabla \times f_V = 0$. Tällöin yhtälö voitaisiin kirjoittaa muodossa

$$\begin{cases} \alpha f_0 - \triangle u = 0 & \text{alueessa } \Omega, \\ \nabla(\alpha u + f_0) = 0 & \text{alueessa } \Omega, \\ f_0 = g & \text{reunalla } \Gamma. \end{cases}$$

Koska $\nabla(\alpha u + f_0) = 0$, niin $\alpha u + f_0 = C$ eli $u = C/\alpha - f_0/\alpha$. Siispä tehtävä palautuu muotoon

$$\begin{cases} \alpha f_0 + \alpha^{-1}\triangle f_0 = \alpha^{-1}(\triangle + \alpha^2) f_0 = 0 & \text{alueessa } \Omega, \\ f_0 = g & \text{reunalla } \Gamma. \end{cases}$$

Lauseen 6.4. ja sen jälkeisen huomautuksen nojalla yhtälö $(\triangle + \alpha^2) f_0 = 0$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $f_0 = v^+ + v^-$, missä $v^\pm \in \ker \bar{\partial}_{\pm\alpha}(\Omega)$ ja edelleen

$$v^\pm = \mp \frac{1}{2\alpha} \nabla f_0 + \frac{1}{2} f_0.$$

Kysymys palautuu siihen, että voimmeko esittää reunadatan g muodossa $g = g^+ + g^-$, missä $g^\pm = P_{\pm\alpha} g^\pm$. Tämä on jo vaikeampi kysymys ja osoittautuisikin, että vastaus riippuu α sekä g:stä. Jos $\Im \alpha > 0$, niin jako onnistuu aina ja on yksikäsitteinen. Kun $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, niin toisilla α jako onnistuu riippumatta g:stä ja on yksikäsitteinen, mutta lopuilla α (joita on numeroituvasti äärettömän monta) jaon onnistuminen (ja siis ratkaisun olemassaolo) riippuu g:stä ja ei ole välttämättä yksikäsitteinen.

Mutta jos esimerkiksi $g = P_\alpha g$ tai $g = P_{-\alpha} g$, niin voimme valita toiseksi jaon tekijäksi nollan. Siis luennoilla käydyillä tuloksilla voimme ratkaista tehtävän ainakin näissä tapauksissa. Koska tiedämme, että $P_\alpha \mathbf{1} = \mathbf{1}$ aina, niin jos g on vakiofunktio, niin ratkaisu on ainakin tällöin mahdollinen.

Mutta kaikissa tapauksissa missä ratkaisu f_0 voidaan löytää, niin varsinainen f ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen, sillä $f = f_0 + \alpha^{-1} \nabla f_0 + C'$, missä C' on mielivaltainen vakio.

Varsinainen tehtävänanto voidaan ratkaista samaan tapaan olettamalla esimerkiksi, että $P_\alpha g = g$ ja asettamalla $f = K_\alpha g + iC\mathbf{1}$. Tällöin $\bar{\partial}_\alpha f = 0$ alueessa Ω ja reunalla $f = g + iC\mathbf{1}$, joten $\operatorname{Re} f = g$. Ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, sillä vakioksi C voimme valita minkä tahansa reaalisen kvaternion.

3. **Riemannin–Hilbertin ongelman erikoistapaus kvaternioille**:

Kun $G = q$ on vakiokvaternio, niin merkitään $\widetilde{f}^-(x) := f^-(x)q$. Tällöin kvaterniotulon liitännäisyyden johdosta

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \widetilde{f}^- &= \partial_\alpha(f^- q) = \sum \partial_k e_k (f^- q) + (\alpha f^-)q = \Big(\sum \partial_k e_k f^-\Big) q + (\alpha f^-)q \\ &= (\partial_\alpha f^-)q = 0\end{aligned}$$

ulkoalueessa Ω^-. Siis ongelma palautuu tehtävän 1 ongelmaan 3. jonka mukaan on olemassa yksikäsitteiset f^+ ja $\widetilde{f}^-$ joilla on hyppy g reunalla. Nyt varsinainen kysymykseen joudumme tarkastelemaan tilannetta missä $q \in \mathcal{G}$ tai $q \notin \mathcal{G}$. Jos q ei ole nollanjakaja, niin voimme jakaa q:llä oikealta, joten $f^- = \widetilde{f}^- q^{-1}$ on yksikäsitteinen. Siis tällöin ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu.

Jos taas q on nollanjakaja, niin $qq^* = 0$. Jaamme tarkastelun kahteen osaan: $g = P_\alpha g$ ja $g = Q_\alpha g$. Yleinen tapaus saataisiin näistä summaamalla mahdolliset ratkaisut.

Jos nyt $g = P_\alpha g$, niin $\widetilde{f}^- = K_\alpha Q_\alpha g = 0$, joten voimme valita $f^- = 0$. Toisaalta $\widetilde{f}^- = f^- q$, joten myös valinta $f^- = q^*$ kävisi. Siispä ratkaisu ei ole tällöin yksikäsitteinen.

Jos taas $g = Q_\alpha g$, niin kertomalla ehdon

$$f^+ = f^- q + g$$

oikealta q^*, niin saamme uudeksi ehdoksi

$$f^+ q^* = g q^*, \quad \text{ja merkitään } \widetilde{f}^+ = \widetilde{g}.$$

Suoraan laskemalla näemme, että

$$\widetilde{g} = g q^* = (Q_\alpha g) q^* = Q_\alpha (g q^*) = Q_\alpha \widetilde{g}.$$

Tällöin ongelmalla

$$\begin{cases} \partial_\alpha \widetilde{f}^+ = 0 & \text{alueessa } \Omega^+ \\ \widetilde{f}^+ = \widetilde{g} & \text{reunalla } \Gamma \end{cases}$$

on ratkaisu ainoastaan silloin, kun $\widetilde{g} = P_\alpha \widetilde{g} = P_\alpha Q_\alpha g q^* = 0$. Mutta tällöin $\widetilde{f}^+ = 0$ koko alueessa Ω. Kuten edellä havaitsimme, niin voimme valita ratkaisuksi $f^+ = Cq^*$, missä $C \in \mathbb{C}$ on mielivaltainen vakio. Siis alkuperäinen ongelma voidaan muotoilla

$$\begin{cases} \partial_\alpha \widetilde{f}^- = 0 & \text{alueessa } \Omega^- \\ \widetilde{f}^- = g - Cq^* & \text{reunalla } \Gamma \end{cases}$$

Koska nyt $g - Cq^* = Q_\alpha(g - Cq^*)$, niin tällä ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu $\widetilde{f}^-$ alueessa Ω^- Ongelman 2. nojalla. Kuitenkaan funktiota f^- ei voida yksikäsitteisesti määrätä, jos f^- olisi eräs ratkaisu, niin myös $f^- + Cq^*$ kelpaisi, sillä $f^-q - (f^-q + Cq^*q) = 0$.

Siispä alkuperäisellä ongelmalla ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, jos q on nollanjakaja.