**Rahoitusteorian välikokeen ratkaisut , (21.10.08),**

Diskreetti todennäköisyysavaruudessa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , jossa $P(\{\omega_1\}) = 0.6$, $P(\{\omega_2\}) = 0.1$, $P(\{\omega_3\}) = 0.3$, olkoon satunnaismuuttujat $S^0(\omega), S^1(\omega)$ osakkeiden arvot hektellä $t = 1$ yhden periodin markkinamallissa. Huomataan että ei ole muita instrumentteja käytössä, siis ei pankkitilia deterministisella tuotolla ei voi käyttää.

Osakkeiden hinnat hetkellä $t = 0$ ovat $\pi^0 = \pi^1 = 1$,

ja hetkellä $t = 1$ ovat satunnaisia, arvoilla

$$\begin{aligned} &S^0(\omega_1) = 1.8, \quad S^0(\omega_2) \; = \; S^0(\omega_3) = 0.8, \\ &S^1(\omega_1) = 0.6, \quad S^1(\omega_2) = 1.6, \quad S^1(\omega_3) = 0.8. \end{aligned}$$

**1)** Valitse $S^0$ numeräärinä. löydä kaikki eqvivalentti-riskineutraali mittoja $Q \sim P$, ja vastaa perustelemalla kysymyksiin : Onko markkinamalli arbitraasivapaa ? Onko markkinamalli täydellinen ?

Olkoon $Q(\{\omega_i\}) = q_i > 0$.

$$\begin{aligned} &E_Q(S^1/S0) = \pi^1/\pi^0 \iff \\ &q_1\frac{0.6}{1.8} + q_2\frac{1.6}{0.8} + q_3\frac{0.8}{0.8} = 1 \text{ ja } q_1 + q_2 + q_3 = 1 \iff \\ &q_1\frac{1}{3} + q_2 2 + q_3 = 1 \text{ ja } q_1 + q_2 + q_3 = 1 \iff \\ &q_2 = q_1\frac{2}{3}, \; q_3 = 1 - q_1\frac{5}{3}, \quad q_1 \in (0, 3/5) \end{aligned}$$

Siis

$$\mathcal{Q} = \{Q_u = (u, \frac{2}{3}u, 1 - \frac{5}{3}u) : u \in (0, 3/5)\}$$

on $P$-eqvivalenttien riskineutraalimittojen joukko $S^0$:n numeräärin suhteen.

Koska on olemassa eriläisiä riskineutraalimittoja $Q \in \mathcal{Q}$ seuraa että malli on arbitraasivapaa mutta ei täydellinen.

**2)** Löydä myös kaikki eqvivalentti-riskineutraali mittoja $Q \sim P$ numeräärillä $S^1$.

$\tilde{Q} \sim P$ on riskineutraali $S^1$ numeräärin suhteen jos ja vain jos

$$E_{\tilde{Q}}(S^0/S^1) = \pi^0/\pi^1 \Longleftrightarrow E_Q(\frac{d\tilde{Q}}{dQ} S^0/S^1) = \pi^0/\pi^1$$

mitan vaihdon kaavan avulla, tämä pätee kun

$$\tilde{Z} := \frac{d\tilde{Q}}{dQ}(\omega) = \frac{S^1(\omega)}{S^0(\omega)} \frac{\pi^0}{\pi^1}$$

Tästä seuraa että jos $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathcal{Q}$ on riski neutraali $S^0$ numeräärin suhteen, vastaava $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$ jossa

$$\tilde{q}_i = q_i \tilde{Z}(\omega_i)$$

on riski neutraali $S^1$ numeräärin suhteen. Nämä mitat muodostuvat joukon

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \{\tilde{Q}_u = (u\frac{1}{3}, \frac{4}{3}u, 1 - \frac{5}{3}u) : u \in (0, 3/5)\} = \{(v, 4v, 1 - 5v) : v \in (0, 1/5)\}$$

Vaihtoehtoisesti olisimme myös voineet ratkaistaa suoraan systeemin tuntemattomille $\tilde{q}_i > 0$, $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
&\tilde{q}_1 \frac{S^0(\omega_1)}{S^1(\omega_1)} + \tilde{q}_2 \frac{S^0(\omega_2)}{S^1(\omega_2)} + \tilde{q}_3 \frac{S^0(\omega_3)}{S^1(\omega_3)} = E_{\tilde{Q}}(S^0/S^1) = \pi^0/\pi^1 \quad \text{ja} \\
&\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 = 1, \quad \text{siis} \\
&\tilde{q}_1\, 3 + \tilde{q}_2\, 1/2 + \tilde{q}_3 = 1 \quad \text{ja} \\
&\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 = 1 \ldots
\end{aligned}$$

Edellisessä markkinamallissa, olkoon $X(\omega) := \mathbf{1}(\omega = \omega_1)$ digitaali-optio, jolla hetkellä $t = 1$ saa arvoa 1 jos ja vain jos $\omega = \omega_1$, 0 muuten.

**3)** Laske arbitraasivapaa hintojen joukko digitaali-optiolle $X(\omega)$.

Otetaan numeräärina $S^0$. Option hinta $c(X)$ on arbitraasivapaa jos ja vain jos

$$c(X) = \pi_0 E_Q(X/S^0) \text{ jollekin } Q \in \mathcal{Q}$$

siis

$$c(X) \in \mathcal{C}(X) = \{u5/9 : u \in (0, 3/5)\} = (0, \frac{1}{3})$$

Tarkastellaan nyt laajennettu osakemalli jolla digitaali-optiolle $X(\omega)$ hetkellä $t = 0$ on sovittu arbitraasi alkuhinta $c(X) = 0.2$.

**4)** Osoita että laajennettu markkinamalli $(S^0, S^1, X; \pi^0, \pi^1, c(X))$ on arbitraasi vapaa ja täydellinen.

Koska $c(X) = 0.2 = u^* 5/9$ jossa $u^* = 9/25 \in (0, 3/5)$

Riski neutraali mitta $Q_{u^*} = (q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (u^*, \frac{2}{3}u^*, 1 - \frac{5}{3}u^*) = (\frac{9}{25}, \frac{6}{25}, 2/5) \in \mathcal{Q}$ on aino riskineutraali mitta markkinmallissa $(S^0 S^1, X; \pi^0, \pi^1, c(X) = 0.2)$, (numeräärin $S^0$:n suhteen).

Tästä seuraa että markkinamalli on arbitraasivapaa ja täydellinen.

**5)** Laske hinta-ja suojaus strategia toiselle digitaalioptiolle $Y(\omega) := \mathbf{1}(\omega = \omega_2)$ laajennetussa markkinamallissa $(S^0, S^1, X; \pi^0, \pi^1, c(X))$.
$Y$:n vaateen yksikäsitteinen hinta on

$$c(Y) = E_{Q_{u^*}}(Y/S^0)\pi^0 = q_2^*/S^0(\omega_2) = \frac{6}{25}\frac{10}{8} = 3/10 = 0.3$$

Suojausstrategia löytyy ratkaisemalla lineaarisen systeemin

$$\eta_0 S^0(\omega_i) + \eta_1 S^1(\omega_i) + \eta_2 X(\omega_i) = Y(\omega_i) \quad , i = 1, 2, 3$$

siis

$$\begin{cases} \eta_0 1.8 & + & \eta_1 0.6 & + & \eta_2 & = & 0 \\ \eta_0 0.8 & + & \eta_1 1.6 & & & = & 1 \\ \eta_0 0.8 & + & \eta_1 0.8 & & & = & 0 \end{cases}$$

jolla on ratkaisu $(\eta_0, \eta_1, \eta_2) = (-5/4, 5/4, 3/2)$.

Voidaan tarkistaa jälkikäteen että portfolion alkuarvo on sama kuin $Y$ option hintaa:

$$\eta_0 \pi_0 + \eta_1 \pi_1 + \eta_2 c(X) = -5/4 + 5/4 + 3/2 \times 2/10 = 3/10 = c(Y)$$