Rahoitusteorian tentti , (16.12.08),

Huomautuksia : Saa käyttää taskulaskinta ei saa käyttää kurssimateriaalia eikä kirjallisuutta.

Jos olet jo suorittanut ensimmäisen välikokeen, sinun ei tarvitse ratkaista tehtävää 1 yhden periodin mallista . Kokeen kesto on 4 tuntia kaikille.

Keskiviikkona 17.12 kello 12 luokassa B321 esitämme tentin ratkaisut.

Maanantaina 22.12 kello 10-14 luokassa D123 on toinen mahdollisuus suorittaa tätä tenttia. Jos haluat parantaa arvosanasi, olet tervetuloa tenttimaan uudelleen.

Ole hyvä ja muistakaa myös antamaan luennotsijalle nimetonta kurssipalautetta nettilomakkeella.

Osa I : Yhden perioodin malli

Tehtävä 1

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon satunnaismuuttuja $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$. Siis

$$P(\{\omega : a < U(\omega) \leq b\}) = (b-a) \text{ kun } 0 \leq a \leq b \leq 1 \ .$$

Yhden perioodin markkinamallissa on kaksi instrumenttia:

riskiton pankkitili B jolla

$$B_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } B_1(\omega) = 6/5 \text{ kun } t = 1.$$

ja osake S jolla

$$S_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } S_1(\omega) = \big(1/2 + U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1.$$

Kysymys 1.i) Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa mutta ei ole täydellinen, esittämällä kahta erilaista riskineutraalimittaa.

Vihjeet: Yksi tapa (joka tietysti ei ole aino tapa) jolla voi saada riskineutraalimitan on seuraava:

Olkoon $V(\omega) \sim$Tasainen(a,b) jossa $0 \leq a < b \leq 1$, siis kun $a \leq r \leq u \leq b$

$$P(r < V \leq u) = (u-r)/(b-a)$$

ja $I(\omega) \in \{0,1\}$ binäärisatunnaismuuttuja. Oletamme että I, V, U ovat riippumattomia P-mitan suhteen,

$$P(I=1) = 1 - P(I=0) = \varepsilon \in [0,1)$$

ja sitten määrittelemme

$$\widehat{U}(\omega) = I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)$$

Osoita ensi että $\hat{U}$:n jakauma on equivalentti U:n jakauman kanssa, siis että

$$P(\widehat{U} \in A) = 0 \Longleftrightarrow P(U \in A) = 0$$

Laske ensi $E_P(\widehat{U})$, parametrien ε, a, b funktiona ja esitä parametriarvot jolla P tule olemaan riskineutraali markkinamallissa $(B, \widehat{S})$ jossa

$$\begin{aligned}
&\widehat{S}_0(\omega) = S_0(\omega) \text{ kun } t = 0 \text{ ja} \\
&\widehat{S}_1(\omega) = \Big(1/2 + \widehat{U}(\omega)\Big) = \Big(1/2 + I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)\Big) \text{ kun } t = 1 \ .
\end{aligned}$$

Kysymys 1.ii) Laske europpalaisen osto-option $F(\omega) = \Big(S_1(\omega) - 1\Big)^+$ arbitraasivapaahintojen joukko $\mathcal{C}(F)$.

Vihje: tutki diskontatun option ja diskontatun osakkeen yhteisjakauman supportin conveksipeitton sisus.

Osa II : aikadiskreetti markkinamallit

Tehtävä 2) Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on annettu aikadiskreetti filtraatio $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \dots, T\}$.

Käsittelemme binoomi-markkina malli joss on riskiton pankkitili instrumentti $B_t = B_0 = 1$ jolla on 0 tuotto jokaisella ajanhetkellä $t = 1, \dots, T$, ja osakeinstrumentti S_t joka on $\mathcal{F}_t$-adaptoitu prosessi jolla $S_0 = 1$ ja

$$0 < P(S_t = S_{t-1}(1+u)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = \Big\{1 - P(S_t = S_{t-1}(1+d)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega)\Big\} < 1$$

P melkein varmasti kaikille $t \in \{1, 2, \dots T\}$.

Tässä $-1 < d < 0 < u$ ovat deterministiset vakiot Olkoon $d = -0.2$ ja $u = 0.3$.

Kysymys 2.i) Etsi mallin yksikäsitteinen riski neutraali mitta, ja näytä että malli on täydellinen ja arbitraasi-vapaa.

Kysymys 2.ii) Osoita ehdollisen odotusarvon määritelmän avulla että (S_t) on martingaali riskineutraali mitan suhteen.

Kysymys 2.iii) Laske hinta europpalaiselle osto-optiolle $F(\omega) = (S_T(\omega))^2$, jossa maturiteetti on $T = 2$.

Kysymys 2.iv) Laske option suojaus strategia.

Vihje: Muistakaa että diskreetti satunnaismuuttuja X on binoomi jakautunut parametreille $p \in [0, 1]$ ja $n \in \mathbb{N}$ kun

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

jos $k = 0, \dots, n$, ja $P(X = k) = 0$ muuten.

Osa III : jatkuvan ajan markkina mallit

Tehtävä 3

Käsittelemme yksinkertäistettu jatkuva-aikainen Black ja Scholes markkina malli, jossa on sijoitusinstrumenttit (B_t) ja (S_t), (pankkitili sijoitus ja osakesijoitus) jossa

$$dS_t = S_t \sigma dW_t, \quad S_0 > 0$$
$$B_t = B_0 = 1, \quad (\text{ pankkitilin korko on } 0)$$

jossa W_t on Brownin liike todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ja $\sigma \neq 0$ on deterministinen vakio.

Siis, S_t on stokastisen differentiaali yhtälön ratkaisu

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u \sigma dW_u$$

jossa esintyy Ito-Föllmerin integraali.

Kysymys 3.i) Näytä Iton kaavan avulla että

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\Big)$$

Kysymys 3.ii) Näytä että S_t on P martingaali Brownin liikkeen filtraatiossa $(\mathcal{F}_t^W)$, josta seuraa että P on riski-neutraali.

Vihje: muistakaa että

$$E(\exp(\theta X)) = \exp\Big(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\Big)$$

gaussiselle satunnaismuuttujalle $X = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Kysymys 3.iii) Käsitellään europpalainen osto-optio

$$G(\omega) = W_T(\omega) = g(S_T) = \sigma^{-1}\log(S_T/S_0) + \frac{1}{2}\sigma T$$

Ito-Clark martingaali esityslauseen ja Iton kaavan avulla, etsi suojaus strategiaa ja hintaa osto-optiolle G:lle.

Vihje: Muistakaa Ito Clarck esityslause:

jos $G \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^{\mathcal{W}}, P)$ jossa $\mathcal{F}_T^W = \sigma(W_s : s \in [0,T])$, seuraa että on olemassa $H_s(\omega)$ adaptoitu Brownin liikkeen filtratiossa, jolle

$$\int_0^T E_P(H_s^2) ds < \infty$$

ja ennustus-martingaalilla on muotoa

$$E_P(F|\mathcal{F}_t^W) = E_P(F) + \int_0^T H_s dW_s$$