

Matemaattinen rahoitusteoria , harjoitustehtävät -2 (17.09.08), Syksy 2008.

Olkoon $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ satunnaismuuttuja.

X :n kertymäfunktio on

$$F_X(t) = P(\omega : X(\omega) \leq t) \in [0, 1]$$

Tehtävä 1 Osoita että kertymäfunktio $F_X(t)$ on ei vähenevä ja oikealta jatkuva.

Kertymäfunktion avulla voidaan määritellä kuvaustodennäköisyys

$$F_X(dt) = P \circ X^{-1}(dt) = P(\omega : X(\omega) \in dt)$$

todennäköisyysavaruudella $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ jolla

$$F_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a) = P(\omega : X(\omega) \in (a, b])$$

Mitta $F_X(dt)$ kutsutaan satunnaismuuttujan X :n jakaumaksi.

Tehtävä 2 i) Osoita että jos $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ on mitallinen funktio, kuvaus $\omega \mapsto g(X(\omega))$ on satunnaismuuttuja.

ii) Osoita että

$$E_P(g(X)) := \int_{\Omega} g(X(\omega))P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t)F_X(dt)$$

Vihje: oletetaan ensi että s.m. $X(\omega)$ saa äärellisesti monta arvoa P -melkein varmasti.

Silloin kun mitta $F_X(dt) \ll \text{Lebesgue}(dt)$, siis funktio F_X on absoluuttisesti jatkuva, seuraa Radon-Nikodym lauseesta että on olemassa Borel-mitallinen Radon-Nikodym derivaatta

$$f_X(t) = \frac{dF_X}{dt}(t) \geq 0$$

joka on olemassa dt -melkein kaikissa pisteissä, jolla

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s)ds .$$

$f_X(t)$ kutsutaan $F_X(dt)$ jakauman tiheysfunktioksi.

Tehtävä 3 Osoita että

$$z(\mu, \sigma^2) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2\pi\sigma^2},$$

jossa $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Vihje: Voit laskea helpommin $z(0, 1)^2$ integraalina \mathbb{R}^2 polaari koordinaattien avulla.

Tästä seuraa että

$$F_X(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_B \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

on todennäköisyys avaruudella $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sitä kutsutaan Gaussiseksi jakaumaksi, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ merkinnällä.

Tehtävä 4 Olkoon X satunnais muuttuja jakaumalla $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

i) Laske

$$E(\exp(\theta X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \theta x\right) dx,$$

ii) Osoita että $E(X) = \mu$.

Vihje : Käytä yhtälö

$$\frac{d}{d\theta} E(\exp(\theta X)) = E\left(\frac{d}{d\theta} \exp(\theta X)\right)$$

pisteessä $\theta = 0$. (Huom. Integroinnin ja derivoinnin järjestyksen vaihtoa on tässä tapauksessa hyvin perustettu, mutta ei päde yleisesti ilmaan mitään oletuksia).

Tehtävä 5 Todennäköisyys avaruudella (Ω, \mathcal{F}, P) on markkina malli (π^0, π^1, S^0, S^1) jossa

$$\pi^0 = 1, S^0 = (1+r), r = 0.5, \pi^1 = 1 \text{ ja } S^1(\omega) = \exp(X(\omega)),$$

jossa X on gaussinen satunnaismuuttuja jolla on jakauma $\mathcal{N}(0, 1)$.

i) Pidetään nyt S^0 numeräärinä. Osoitamme että malli on arbitraasivapaa. Etsi riski neutraali todennäköisyysmitta Q , jonka suhteen s.m. X on vielä gaussinen $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Siis laske mikä μ pitäisi olla että malli olisi riski neutraali.

ii) Laske Radon Nikodym derivaatta dQ/dP .

iii) Samalla numeräärillä S^0 :lla, on olemassa muita riski neutraali mittoja. Esitä joku toinen riski neutraali mitta.

iv) Vasta kysymyksiin i) ,ii) iii) silloin kun valitaan numerääriksi S^1 .