

Mathematical Finance, Ratkaisut -12 (10.12.08), Fall 2008.

On a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ we have two independent P -Brownian motions (W_t) and (B_t) .

Consider the following Black and Scholes market with two assets:

$$\begin{aligned}dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad , S_0 > 0 \\dX_t &= X_t(b dt + a dB_t), \quad X_0 > 0\end{aligned}$$

where $\mu, \sigma, a, b, \in \mathbb{R}$, (W_t) and (B_t) are independent a Brownian motions under the subjective probability measure P . Note that from independence it follows that $\langle B, W \rangle_t = 0$.

We have $S_t, X_t > 0$ at all t P -a.s. so we can choose each of them as numeraire. We want to see what happens with different choices of the numeraire. Note that there is not a riskless bank account which we could use.

Exercise 1 Compute the stochastic differential equation satisfied by $\tilde{X}_t = X_t/S_t$ and by $\tilde{S}_t = S_t/X_t$

Hint: use either Ito formula or the integration by parts formula.

Huomataan ensi että koska $dS_t = S_t\mu dt + S_t\sigma dW_t$, $d\langle W \rangle_t = dt$,

$$\langle S \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t S_u^2 du$$

Seuraa myös että

$$\langle X, S \rangle_t = \sigma a \int_0^t S_u X_u d\langle B, W \rangle_u = 0$$

koska $\langle B, W \rangle_t = 0$.

Iton kaavasta, kun $f(x) = x^{-1}$, $f'(x) = -x^{-2}$ $f''(x) = 2x^{-3}$

$$\begin{aligned}d(S_t^{-1}) &= -S_t^{-2}dS_t + \frac{1}{2}2S_t^{-3}d\langle S \rangle_t = -S_t^{-2}S_t\mu dt - S_t^{-2}S_t\sigma dW_t + S_t^{-3}\sigma^2 S_t^2 dt \\ &= -S_t^{-1}\{(\mu - \sigma^2)dt + \sigma dW_t\}\end{aligned}$$

Nyt osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned} d\widetilde{X}_t &= d(X_t S_t^{-1}) = X_t d(S_t^{-1}) + S_t^{-1} dX_t + d\langle X, S \rangle = \\ &= -X_t S_t^{-1} \{(\mu - \sigma^2)dt + \sigma dW_t\} + X_t S_t^{-1} \{bdt + adB_t\} + 0 = \\ &= \widetilde{X}_t \{(b + \sigma^2 - \mu)dt + adB_t - \sigma dW_t\} \end{aligned}$$

Samoin saadaan

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \{(\mu + a^2 - b)dt - adB_t + \sigma dW_t\}$$

Exercise 2 Check for which values of σ, μ, a, b $\widetilde{S}_t = S_t/X_t$ and $\widetilde{X}_t = X_t/S_t$ are respectively martingales, submartingales, supermartingales w.r.t. the probability measure P .

Tarkistetaan trendin merkki: koska $(\widetilde{S}_t \widetilde{X}_t) > 0$, seuraa että \widetilde{S}_t on ylimartingaali (vastaavasti martingaali, alimartingaali) P mitan suhteen jos ja vain jos $(\mu + a^2 - b) \geq 0$ (vastaavasti $=, \leq$).

\widetilde{X}_t on ylimartingaali (vastaavasti martingaali, alimartingaali) P mitan suhteen jos ja vain jos $(b + \sigma^2 - \mu) \geq 0$, (vastaavasti $=, \leq$).

Huomataan että joillakin parametrin arvolla \widetilde{X}_t ja $\widetilde{S}_t = \widetilde{X}_t^{-1}$ sattaavat olla molemmat alimartingaaleja, siis esimerkiksi kun $a^2 \geq (b - \mu) \geq 0$.

Tämä tuntuu hieman paradoksaalilta, siis jossakin tilantessa malli salli että molemmilla dollari/punta ja punta/dollari kurssilla on positiivinen trendi. Tämä ei ole kuitenkin matemaattinen ristiriita, se voi tapahtua yksinkertaisesti siksi että käänteisfunktio $x \mapsto x^{-1}$ ei ole lineaarinen.

Exercise 3 Use Girsanov Theorem to find a risk-neutral measure $\widehat{Q} \sim P$ under which \widetilde{X}_t is a \widehat{Q} -martingale. Is this risk neutral measure unique?

Huomataan että \widetilde{X} dynamiikkaa riippuu kahdesta P -riippumattomista Brownin liikeistä, (B_t) ja (W_t) joilla $\langle B, W \rangle_t = 0$.

Koska voidaan "peukaloida" kahta Browninliikkeitä (B_t) ja (W_t) lisämällä molemmille drifteja, on vain yksi riskineutralisuus ehto prosessille \widetilde{S}_t , seuraa että on useita riskineutraali mittoja.

Siis olkoon

$$\widehat{W}_t = W_t + \alpha t, \quad \widehat{B}_t = B_t + \beta t$$

jossa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deterministisiä.

Girsanovin kaavasta seuraa että (\widehat{W}_t) ja (\widehat{B}_t) ovat Brownin liikkeitä \widehat{Q} mitan suhteen jossa

$$\widehat{Z}_T := \frac{d\widehat{Q}_T}{dP_T} = \mathcal{E}(-\alpha W + \beta B)_t = \exp\left(-\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right) \exp\left(-\beta B_t - \frac{1}{2}\beta^2 t\right)$$

Koska

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_t \{(b + \sigma^2 - \mu)dt + a dB_t - \sigma dW_t\} = \widetilde{X}_t \{(b + \sigma^2 - \mu)dt + a d\widehat{B}_t - a\beta dt - \sigma d\widehat{W}_t + \sigma\alpha dt\}$$

\widehat{Q} on riskineutraali mitta jos ja vain jos

$$b - \mu + \sigma^2 + \sigma\alpha - a\beta = 0$$

ratkaisu on

$$\widehat{\beta} = \widehat{\beta}(\alpha) := \frac{b - \mu + \sigma^2 + \sigma\alpha}{a}$$

kun α on vapaa parametri.

Find also a risk-neutral measure $\check{Q} \sim P$ under which \check{S}_t is a \check{Q} -martingale. Samoin saadan että kun α on vapaa parametri ja

$$\check{\beta} = \check{\beta}(\alpha) := \frac{\mu - b + \sigma^2 + a\alpha}{\sigma}$$

\check{S}_t on martingaali vastaavan mitan \check{Q} :n suhteen.

Exercise 4 Choose a numeraire and a corresponding risk-neutral measure for pricing as in exercise 3 and compute an arbitrage free price of the swap option $F(\omega) = (X_T - S_T)^+$ which gives to the owner the right to change one S asset with one X asset at maturity time T .

Siis valitaan riskineutraalimitta \hat{Q}_α , $\alpha \in \mathbb{R}$ joka vastaa paria $(\alpha, \hat{\beta}(\alpha))$ jolla (\tilde{X}_t) on \hat{Q}_α martingaali, jossa numeräärinä toimii S_t . Vastaava arbitraasivapaa hinta optiolle F on

$$c_\alpha(F) = E_{\hat{Q}_\alpha}(FS_T^{-1})S_0 = E_{Q_\alpha}((X_T - S_T)^+ S_T^{-1})S_0 = E_{\hat{Q}_\alpha}((\tilde{X}_T - 1)^+)S_0$$

\hat{Q}_α mitan suhteen

$$d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t(ad\hat{B}_t - \sigma d\hat{W}_t)$$

seuraa Girsanovin kaavasta ja siitä että $\langle \hat{B}, \hat{W} \rangle_t = \langle B, W \rangle_t = 0$

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 \exp\left\{(a\hat{B}_t - \sigma\hat{W}_t) - \frac{t}{2}(a^2 + \sigma^2)\right\}$$

Huomataan että $Y = (a\hat{B}_T - \sigma\hat{W}_T)$ \hat{Q}_α mitan suhteen on gaussinen jakaumalla $\mathcal{N}(0, (a^2 + \sigma^2)T)$

Siis

$$\begin{aligned} c_\alpha(F) &= S_0 E_{\hat{Q}_\alpha}((\tilde{X}_T - 1)^+) = X_0 E_{\hat{Q}_\alpha}((\tilde{X}_T/\tilde{X}_0 - \tilde{S}_0)^+) = \\ &= X_0 \exp\left(-\frac{T}{2}(a^2 + \sigma^2)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\exp\left(y\sqrt{(a^2 + \sigma^2)T}\right) - \exp\left(\frac{T}{2}(a^2 + \sigma^2)\right)\right)^+ \exp(-y^2/2) dy \\ &= X_0 \exp\left(-\frac{T}{2}(a^2 + \sigma^2)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d^+}^{+\infty} \left\{\exp\left(y\sqrt{(a^2 + \sigma^2)T}\right) - \exp\left(\frac{T}{2}(a^2 + \sigma^2)\right)\right\} \exp(-y^2/2) dy \end{aligned}$$

jossa

$$d^+ = d^+(\tilde{S}_0) = \frac{\log \tilde{S}_0}{\sqrt{(a^2 + \sigma^2)T}} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + \sigma^2)T}$$

$$\begin{aligned} &= X_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d^+}^{+\infty} \exp\left(-\left(y - \sqrt{(a^2 + \sigma^2)T}\right)^2/2\right) dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d^+}^{+\infty} \exp(-y^2/2) dy \right\} = \\ &= X_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d^-}^{+\infty} \exp(-y^2/2) dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d^+}^{+\infty} \exp(-y^2/2) dy \right\} \\ &= X_0((1 - \Phi(d^-)) - (1 - \Phi(d^+))) = X_0\{\Phi(d^+) - \Phi(d^-)\} \end{aligned}$$

jossa

$$d^- = d^-(\tilde{S}_0) = d^+(\tilde{S}_0) - \sqrt{(a^2 + \sigma^2)T} = \frac{\log \tilde{S}_0}{\sqrt{(a^2 + \sigma^2)T}} - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + \sigma^2)T}$$

$\Phi(y) = (1 - \Phi(-y))$ on standardoidun gaussisen jakauman kertymfunktio.

Is the price unique or it depends on the choice of the risk neutral pricing measure ? Compute the set of all arbitrage free prices for F .

Huomataan että vaikka on useita riskineutraalimittoja, tämän option hinta on yksikäsitteinen, koska näemme että $c_\alpha(F)$ ei riipu parametrusta α . Tämä seuraa koska \tilde{X}_T jakauma on samaa kaikille riskineutraali mittojen suhteen.

Vaikka yhtälö $E_Q(f(S_T)/X_T) = E_Q(f(S_T/X_T))$ **ei päde** yleisesti, se pätee tässä erikoistapauksessa kun $f(x) = (x - 1)^+$

Exercise 5 Suppose that introduce a third riskless asset $dR_t = R_t r dt$, $R_0 = 1$, $r \in \mathbb{R}$. Now we have a market with three instruments, S_t, X_t, R_t .

Choose R as a numeraire. Show that there is an unique risk neutral measure $Q \sim P$ and compute the unique fair price and the hedging strategy of the swap option $F(\omega)$.

Nyt olisi mahdollista osoittaa että markkinamalli on täydellinen. Mutta kuitenkin emme edes tarvitse sitä koska olemme osoittaneet että myös alkuperäisessä (X_t, S_t) epätäydellisessä option $F = (X_T - S_T)^+$ hinta oli yksikäsitteinen, hinta ei sitten muutu kun markkinoilla on lisää instrumentteja.

Emme edes tarvitse numeräärin vaihtoa.

Sen sijaan laskemme suojausstrategian optiolle F alkuperäisessä (X_t, S_t) -markkinamallissa: Hetkellä $0 < t < T$ option hinta on

$$\begin{aligned} c_t(F) &= E_{\hat{Q}}((\tilde{X}_T - 1)^+ | \mathcal{F}_t) S_t = E_{\hat{Q}}((\tilde{X}_T / \tilde{X}_t - \tilde{S}_t)^+ | \mathcal{F}_t) X_t \\ &= E_{\hat{Q}}((\tilde{X}_{T-t} - s)^+) \Big|_{s=\tilde{S}_t} X_t = X_t \{ \Phi(d^+(\tilde{S}_t)) - \Phi(d^-(\tilde{S}_t)) \} \end{aligned}$$

jossa

$$d^\pm(\tilde{S}_t) := \frac{\log \tilde{S}_t}{\sqrt{(a^2 + \sigma^2)(T-t)}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + \sigma^2)(T-t)}$$

Diskontatun option arvo hetkellä $t \leq T$ on

$$\tilde{c}_t(F) = c_t(F) X_t^{-1} = \{ \Phi(d^+(\tilde{S}_t)) - \Phi(d^-(\tilde{S}_t)) \} := \tilde{c}^F(t, \tilde{S}_t)$$

joka on martingaali kaikki riski neutraalimittojen \hat{Q}_α :n suhteen.

S_t osakkeen paino γ_t option suojaus-portfoliossa $\pi = (\beta_t, \gamma_t)$ löytyy derivoimalla $\tilde{c}^F(t, \tilde{S}_t)$ \tilde{S} :n suhteen:

$$\begin{aligned} \gamma_t(\omega) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{S}} \tilde{c}^F(t, \tilde{S}_t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{S}} \Phi(d^+(\tilde{S}_t)) - \frac{\partial}{\partial \tilde{S}} \Phi(d^-(\tilde{S}_t)) \right\} = \\ &= \frac{\Phi'(d^+(\tilde{S}_t)) - \Phi'(d^-(\tilde{S}_t))}{\tilde{S}_t \sqrt{(a^2 + \sigma^2)(T-t)}} = \tilde{X}_t \frac{\Phi'(d^+(\tilde{S}_t)) - \Phi'(d^-(\tilde{S}_t))}{\sqrt{(a^2 + \sigma^2)(T-t)}} = \\ &= \tilde{X}_t \left(\frac{\exp(-d^+(\tilde{S}_t)^2/2) - \exp(-d^-(\tilde{S}_t)^2/2)}{\sqrt{2\pi(a^2 + \sigma^2)(T-t)}} \right) \end{aligned}$$

X_t osakkeen painon on

$$\beta_t = \frac{V_t^\pi - \gamma_t S_t}{B_t}$$

jossa

$$V_t^\pi = c^F(t, \tilde{S}_t) = \beta B_t + \gamma_t S_t = c(F) + \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u .$$