Rahoitusteorian tentti , (16.12.08),

Huomautuksia : Saa käyttää taskulaskinta ei saa käyttää kurssimateriaalia eikä kirjallisuutta.

Jos olet jo suorittanut ensimmäisen välikokeen, sinun ei tarvitse ratkaista tehtävää 1 yhden periodin mallista . Kokeen kesto on 4 tuntia kaikille.

Keskiviikkona 17.12 kello 12 luokassa B321 esitämme tentin ratkaisut.

Maanantaina 22.12 kello 10-14 luokassa D123 on toinen mahdollisuus suorittaa tätä tenttia. Jos haluat parantaa arvosanasi, olet tervetullut tenttimaan uudelleen.

Ole hyvä ja muistakaa myös antamaan luennotsijalle nimetonta kurssipalautetta nettilomakkeella.

Osa I : Yhden perioodin malli

Tehtävä 1

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon satunnaismuuttuja $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$. Siis

$$P(\{\omega : a < U(\omega) \leq b\}) = (b-a) \text{ kun } 0 \leq a \leq b \leq 1 \ .$$

Yhden perioodin markkinamallissa on kaksi instrumenttia:

riskiton pankkitili B jolla

$$B_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } B_1(\omega) = 6/5 \text{ kun } t = 1.$$

ja osake S jolla

$$S_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } S_1(\omega) = \big(1/2 + U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1.$$

Kysymys 1.i) Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa mutta ei ole täydellinen, esittämällä kahta erilaista riskineutraalimittaa.

Vihjeet: Yksi tapa (joka tietysti ei ole aino tapa) jolla voi saada riskineutraalimitan on seuraava:

Olkoon $V(\omega) \sim$Tasainen(a,b) jossa $0 \leq a < b \leq 1$, siis kun $a \leq r \leq u \leq b$

$$P(r < V \leq u) = (u-r)/(b-a)$$

ja $I(\omega) \in \{0,1\}$ binäärisatunnaismuuttuja. Oletamme että I, V, U ovat riippumattomia P-mitan suhteen,

$$P(I=1) = 1 - P(I=0) = \varepsilon \in [0,1)$$

ja sitten määrittelemme

$$\widehat{U}(\omega) = I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)$$

Osoita ensi että $\hat{U}$:n jakauma on equivalentti U:n jakauman kanssa, siis että

$$P(\widehat{U} \in A) = 0 \Longleftrightarrow P(U \in A) = 0$$

Laske ensi $E_P(\widehat{U})$, parametrien ε, a, b funktiona ja esitä parametriarvot jolla P tule olemaan riskineutraali markkinamallissa $(B, \widehat{S})$ jossa

$$\begin{aligned}
&\widehat{S}_0(\omega) = S_0(\omega) \text{ kun } t = 0 \text{ ja} \\
&\widehat{S}_1(\omega) = \Big(1/2 + \widehat{U}(\omega)\Big) = \Big(1/2 + I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)\Big) \text{ kun } t = 1 \ .
\end{aligned}$$

Kysymys 1.ii) Laske europpalaisen osto-option $F(\omega) = \Big(S_1(\omega) - 1\Big)^+$ arbitraasivapaahintojen joukko $\mathcal{C}(F)$.

Vihje: tutki diskontatun option ja diskontatun osakkeen yhteisjakauman supportin conveksipeitton sisus.

Osa II : aikadiskreetti markkinamallit

Tehtävä 2) Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on annettu aikadiskreetti filtraatio $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$.

Käsittelemme binoomi-markkina malli joss on riskiton pankkitili instrumentti $B_t = B_0 = 1$ jolla on 0 tuotto jokaisella ajanhetkellä $t = 1, \ldots, T$, ja osakeinstrumentti S_t joka on $\mathcal{F}_t$-adaptoitu prosessi jolla $S_0 = 1$ ja

$$0 < P(S_t = S_{t-1}(1+u)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = \Big\{1 - P(S_t = S_{t-1}(1+d)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega)\Big\} < 1$$

P melkein varmasti kaikille $t \in \{1, 2, \ldots T\}$.

Tässä $-1 < d < 0 < u$ ovat deterministiset vakiot Olkoon $d = -0.2$ ja $u = 0.3$.

Kysymys 2.i) Etsi mallin yksikäsitteinen riski neutraali mitta, ja näytä että malli on täydellinen ja arbitraasi-vapaa.

Seuraa että Q on riski neutraali jos ja vain jos jokaisella ajan hetkellä t

$$q_t(\omega) := Q(S_t = S_{t-1}(1+u)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = \Big\{1 - Q(S_t = S_{t-1}(1+d)|\mathcal{F}_{t-1})(\omega)\Big\} =$$
$$q = \frac{r-d}{u-d} = \frac{-d}{u-d} = 2/5.$$

ja uskottavuusosmääräprosessi on

$$Z_t(\omega) := \frac{dQ_t}{dP_t}(\omega) = \left(\frac{p}{q}\right)^{N_t(\omega)} \left(\frac{(1-q)}{(1-p)}\right)^{t-N_t(\omega)}, \quad t = 0, 1, \ldots, T$$

jossa (N_t) laskee ylöspäin siirtymien määrä,

$$N_t(\omega) = \sum_{s=1}^{t} \mathbf{1}\Big\{S_t(\omega) = S_{t-1}(\omega)(1+u)\Big\}$$

Kysymys 2.ii) Osoita ehdollisen odotusarvon määritelmän avulla että (S_t) on martingaali riskineutraali mitan suhteen.

Suoraan lasku

$$E_Q(S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_Q\Big(S_{t-1}\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}\Big) = S_{t-1}E_Q(\frac{S_t}{S_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}\Big) =$$
$$S_{t-1}\Big\{(1+u)q_t(\omega) + (1+d)(1-q_t)(\omega)\Big\} = S_{t-1}\Big\{(1+u)q + (1+d)(1-q)\Big\} = S_{t-1}$$

Kysymys 2.iii) Laske hinta europpalaiselle osto-optiolle $F(\omega) = (S_T(\omega))^2$, jossa maturiteetti on $T = 2$.

Teorian mukaan koska korko $r = 0$ seuraa että kun $T = 2$ seuraamalla binääripuuta,

$$c_0 = E_Q(S_T^2) = S_0^2\Big\{(1+u)^4 q^2 + (1+d)^4(1-q)^2 + 2(1+u)^2(1+d)^2 q(1-q)\Big\} = 1.1236 \times S_0^2$$
$$\text{, kun } t = 0, \quad c_1(\omega) = E_Q(S_T^2|\mathcal{F}_1) = E_Q(S_T^2|S_1)(\omega)\{S_1(\omega)\}^2\{(1+u)^2 q + (1+d)^2(1-q)\}$$
$$= 1.06\{S_1(\omega)\}^2 = 1.06 \times (1.3)^2\mathbf{1}(\omega_1 = 1) + 1.06 \times (0.8)^2\mathbf{1}(\omega_1 = 0) =$$
$$1.7914 \times \mathbf{1}(\omega_1 = 1) + 0.6784 \times \mathbf{1}(\omega_1 = 0)$$

Kysymys 2.iv) Laske option suojaus strategia.

Olkoon $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ jossa $\omega_t = 0$ kun osake laskee, $\omega_t = 1$ kun osake nousee.

$$\nabla_T(S_T^2)(\omega) = \nabla_T(S_T^2)(\omega_1) = (S_T)^2(\omega_1, 1) - (S_T)^2(\omega_1, 0) =$$
$$= S_{t-1}^2\{(1+u)^2 - (1+d)^2\} = S_{t-1}^2(u^2 - d^2 + 2(u-d))$$

Koska $S_2 - S_1 = \Delta S_2 = S_1(u-d)\{\omega_2 - q\}$ seuraa että

$$\{(S_2)(\omega)\}^2 = E_Q(S_s^2|\mathcal{F}_1)(\omega_1) + \nabla_T(S_T^2)(\omega_1)\{\omega_2 - q\} =$$
$$E_Q(S_s^2|\mathcal{F}_1)(\omega_1) + \nabla_T(S_T^2)(\omega_1)\frac{1}{(u-d)S_1}\Delta S_2 = c_1(\omega_1) + \gamma_2\Delta S_2$$

Otetaan portfolio $(\beta_T(\omega_1), \gamma_T(\omega_1))$ jolla hetkellä $t = T-1$ on arvo

$$V_{T-1}(\omega) = c_1(\omega_1) = E_Q(S_s^2|\mathcal{F}_1)(\omega_1) = \beta_2 + \gamma_2(\omega_1)S_1(\omega_1)$$
$$V_T(\omega) = c_1(\omega_1) + \gamma_2(\omega_1)\Delta S_2(\omega) =$$
$$\beta_2(\omega_1) + \gamma_2(\omega_1)S_2(\omega) = \{S_2(\omega)\}^2$$

Samoin hetkellä $t = 1$

$$c_1(\omega_1) = E_Q(c_1) + \nabla_1 E_Q(S_2^2|S_1)\frac{1}{(u-d)S_0}\Delta S_1 = c_0 + E_Q(\nabla_1 S_2^2|S_1)\frac{1}{(u-d)S_0}\Delta S_1 =$$
$$c_1(\omega_1) = E_Q(c_1) + \nabla_1(c_1)\frac{1}{(u-d)S_0}\Delta S_1 = c_0 + \gamma_1\Delta S_1$$

ja portfolio hetkellä $t = 0$ on (β_1, γ_1) deterministinen jossa $\beta_1 = c_0 - \gamma_1 S_0$.

Nyt numeroiksi saadaan kun $t=1$

$$\gamma_2(\omega_1) = \frac{S_1^2\Big\{u^2-d^2+2(u-d)\Big\}}{(u-d)S_1} = S_1(\omega)\Big\{\frac{u^2-d^2}{u-d}+2\Big\} = 2.1\times S_1(\omega_1)$$
$$\beta_2 = c_1(\omega_1) - \gamma_2(\omega_1)S_1(\omega_1) = 1.06 - 2.1\times S_1(\omega_1)^2$$

ja kun $t=0$,

$$\gamma_1 = \nabla_1(c_1)\frac{1}{(u-d)S_0} = 1.06\nabla_1\{(S_1)^2\}\frac{1}{(u-d)S_0} =$$
$$= 1.06\times S_0^2\frac{(u^2-d^2+2(u-d))}{(u-d)S_0} = 1.06\times 1.05\times 2\times S_0 = 2.226\times S_0$$
$$\beta_1 = c_0 - \gamma_1 S_0 = (1.1236-2.226)\times S_0^2 = -1.1024\times S_0^2$$

Lopuksi voidaan sijoittaa $S_0=1$.

Osa III : jatkuvan ajan markkina mallit

Tehtävä 3

Käsittelemme yksinkertäistettu jatkuva-aikainen Black ja Scholes markkina malli, jossa on sijoitusinstrumenttit (B_t) ja (S_t), (pankkitili sijoitus ja osakesijoitus) jossa

$$dS_t = S_t\sigma dW_t, \quad S_0>0$$
$$B_t = B_0 = 1, \quad (\text{ pankkitilin korko on } 0)$$

jossa W_t on Brownin liike todennäköisyysavaruudella $(\Omega,\mathcal{F},P)$, ja $\sigma\neq 0$ on deterministinen vakio.

Siis, S_t on stokastisen differentiaali yhtälön ratkaisu

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u\sigma dW_u$$

jossa esintyy Ito-Föllmerin integraali.

Kysymys 3.i) Näytä Iton kaavan avulla että

$$S_t = S_0\exp\Big(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\Big)$$

Olkoon $f(t,x)=\exp(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$, Iton kaavasta

Iton Föllmerin kaavasta

$$\begin{aligned}
df(t,W_t) &= \frac{\partial}{\partial t}f(t,W_t)dt + \frac{\partial}{\partial x}f(t,W_t)dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,W_t)d\langle W\rangle_t \\
&= -\frac{1}{2}\exp(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\sigma^2 dt + \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\sigma dW_t + \frac{1}{2}\exp(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\sigma^2 dt \\
&= -\frac{1}{2}S_t\sigma^2 dt + S_t\sigma dW_t + \frac{1}{2}S_t\sigma^2 ds = S_t\sigma dW_t
\end{aligned}$$

Kysymys 3.ii) Näytä että S_t on P martingaali Brownin liikkeen filtraatiossa $(\mathcal{F}_t^W)$, josta seuraa että P on riski-neutraali.

Tiedämme että gaussisen jakauman

$$E(\exp(\theta X)) = \exp\Big(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\Big)$$

gaussiselle satunnaismuuttujalle $X = \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Tästä seuraa suoraan että $E_P(S_t) < \infty$, kaikille $t \geq 0$, myös $S_t = f(t,W_t)$ on $\sigma(W_t) \subseteq \mathcal{F}_t^W$ -mitallinen, siis (S_t) on $\{\mathcal{F}_t^W\}$-mitallinen.

Kun $u > t$,

$$\begin{aligned}
&E_P(S_u|\mathcal{F}_t) = E_P\Big(S_t\frac{S_u}{S_t}\Big|\mathcal{F}_t\Big) = S_t E_P\Big(\frac{S_u}{S_t}\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \\
&S_t E_P\Big(\exp(\sigma(W_u - W_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-u))\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \\
&S_t E_P\Big(\exp(\sigma(W_u - W_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-u))\Big) = S_t \times 1
\end{aligned}$$

koska $(W_u - W_t) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t$ ja $\mathcal{N}(0, t-u)$ jakautunut P-mitan suhteen.

Kysymys 3.iii) Käsitellään europpalainen osto-optio

$$G(\omega) = W_T(\omega) = g(S_T) = \sigma^{-1}\log(S_T/S_0) + \frac{1}{2}\sigma T$$

Ito-Clark martingaali esityslauseen ja Iton kaavan avulla, etsi suojaus strategiaa ja hintaa osto-optiolle G:lle.

Vihje: Muistakaa Ito Clark esityslause:

jos $G \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^{\mathcal{W}}, P)$ jossa $\mathcal{F}_T^W = \sigma(W_s : s \in [0,T])$, seuraa että on olemassa $H_s(\omega)$ adaptoitu Brownin liikkeen filtratiossa, jolle

$$\int_0^T E_P(H_s^2)ds < \infty$$

ja ennustus-martingaalilla on muotoa

$$E_P(F|\mathcal{F}_t^W) = E_P(F) + \int_0^T H_s dW_s$$

Siis koska P on jo riskineutraali mitta, ja W_t on Brownin liike P-mitan suhteen

$$W_T = E_P(W_T) + \int_0^T 1\; dW_s = E_P(W_T) + \int_0^T \sigma^{-1} S_t^{-1} dS_t$$
$$V_t^\pi = E_P(W_T|\mathcal{F}_t) = W_t = E_P(W_T) + \int_0^t \sigma^{-1} S_u^{-1} dS_u$$

on Brownin liike joka on neliö integroituva matringaali.

Siis option hinta on $E_P(W_T) = 0$ (!) ja portfolio on $\pi = (\beta_t, \gamma_t)$ arvolla $V_t^\pi = \beta_t + \gamma_t S_t$ jossa

$$\gamma_t = \sigma^{-1} S_t^{-1}, \quad \beta_t = V_t^\pi - \gamma_t S_t$$

Huomautus:

Tässä on anteeksipyynnön paikka: yritin keksiä mahdollisimmin helppoa optiota, ei tullut mieleen että W_t voi saada myös negatiivisia arvoja. Tämä ei ole riistiriidassa meidän hinnoitteilun teorian kanssa, sopimuksen W_T hinta on joka tapauksessa olemassa. Jos haluamme välttää negatiivisia arvoja, voisimme hajottaa $c(W_T) = c(W_T^+) - c(W_T^-)$ koska $W_T = W_T^+ - W_T^-$, jossa optiot W_T^+, W_T^- saavat ei-negatiivisia arvoja. Myönnetään että tästä ei ollut aikaisemmin puheetta luennolla

Teknisesti sopimus jolla voi olla myös negatiivinen tuotto ei saisi kutsua optioksi, silloin käytetään futuuri *eng. future* nimitystä.