Matemaattinen rahoitusteoria , harjoitustehtävät -8 (12.11.08), Syksy 2008.
Amerikkalaiset optiot epätäydellisessä mallissa .

Todennäköisavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, oletamme markkinamallia jossa on kaksi rahoitusinstrumenttia $(B_t(\omega), S_t(\omega) : \ t = 0, 1, \dots, T)$, ei negatiivisia ja $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0,1,\dots,T}$-sopivia (adapted).

Voidaan olettaa että σ-algebra $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ on triviaali, siis B_0 ja S_0 deterministisia.

Olkoon $(G_t(\omega))_{t=1,2,\dots,T}$ amerikkalainen optio, siis oikeus lunastaa kerran $G_t(\omega)$ valitulla hetkellä $t \in \{1, \dots, T\}$.

Olkoon $\mathcal{Q}$ eqvivalentti martingaali mittojen joukko numeräärillä $S^{(0)}$. Oletamme että (B, S) markinamalli ei ole täydellinen, siis $\mathcal{Q}$ sisältää useita riskineutraalimittoja.

Merkitsemme diskontatut prosessit

$$\tilde{S}_t(\omega) = S_t(\omega)/B_t(\omega), \quad \tilde{G}_t(\omega) = G_t(\omega)/B_t(\omega)$$

1) Osoita että hetkellä $t = 0$ amerikkalaisen option $(G_t(\omega))_{t=1,\dots,T}$ arbitraasivapaiden hintojen joukko $\mathcal{C}$ on yksikäsitteinen jos ja vain jos $U_0^+ = U_0^-$,

muuten $\mathcal{C}$ on avoin väli (U_0^-, U_0^+) , jossa määritellään rekursivisesti

$$
\begin{aligned}
U_T^+(\omega) &= U_T^-(\omega) = G_T(\omega), \\
U_t^+(\omega) &= \max\left\{ G_t(\omega),\ B_t(\omega) \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_{t+1}^+/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \right\}, \qquad t = 1, \dots, T-1 \\
U_0^+(\omega) &= B_0 \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_1^+(\omega)/B_1(\omega)) \\
U_t^-(\omega) &= \max\left\{ G_t(\omega),\ B_t(\omega) \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_{t+1}^-/B_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \right\} \quad t = 1, \dots, T-1 \\
U_0^-(\omega) &= B_0 \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_1^+(\omega)/B_1(\omega)) \quad t = 0
\end{aligned}
$$

Vihje: katso ensi mitä tapahtuu kun $T = 2$.

3) Osoita että

$$U_0^+ = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0} \sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(G_\tau), \qquad U_0^- = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_0} \inf_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(G_\tau)$$

jossa $\mathcal{T}_0$ on pysähdyshektien joukko.

4) Osoita että

$$\tau_{\min}(\omega) = \inf\left\{1 \leq t \leq T : \ G_t = \ B_t(\omega) \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(U^-_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_1)(\omega)\right\}$$

ja

$$\tau_{\max}(\omega) = \inf\left\{1 \leq t \leq T : \ G_t > \ B_t(\omega) \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(U^+_{t+1}/B_{t+1}|\mathcal{F}_1)(\omega)\right\}$$

ovat pysähdyshetkiä jolla $\tau_{\min} \leq \tau_{\max}$ P-melkein varmasti.

5) Osoita että option ostajan ei kannata lunastaa optionsa ennen hetkeä $\tau_{\min}(\omega)$ eikä hetken $\tau_{\max}(\omega)$ jälkeen.

Kirjallisuus: Tätä problematiikkaa käsitellään muun muassa luvussa 6.3 Föllmerin ja Shiedin *Stochastic Finance* kirjassa.