

0.1 Iton kalkyyli deterministisille funktioille H. Föllmerin mukaan.

Tämä esitelmä voisi olla osaa ensimmäistä tai viimeistä luentoa stokastisen analyysin kurssilla, tai jossakin siitä välistä. Ei vaadi opiskelijoilta enempää esitietoa kuin Taylorin kehittelmää ja perustodennäköisyyslaskentaa.

Ito integraali on approksimoivien Riemannin summien rajaarvo, jotka supenevat stokastisesti. Stokastisesta konvergenssista seuraa melkein varma konvergenssi jotakin alijonoa pitkin.

Vuonna 1979 lyhyessä artikkelissa ranskalaisessa Seminaire de Probabilites kirjasarjassa H. Föllmer huomatti että Ito integraali voidaan ymmärtää myös poluttaisesti, kun Riemannin summien suppeneminen ymmärretään P -melkein varmasti joitakin ositusten jonoja pitkin.

Artikkelin otsikko oli "Calcul d'Ito sans probabilites". eli "Iton kalkyyli ilman todennäköisyyttä".

Reaalimailmassa usein stokastisesta prosessista havaitaan vaan yhden polun, (esimerkiksi osakkeen hintakehytys) ja sen kanssa pitää tulla toimeen. Kun on kyse yksittäisestä polusta Föllmerin tulkinta tuntuu konkreetisemmalta ja miellyttävämmältä kuin perinteistä "abstraktia" stokastisen konvergenssin tai $L^2(P)$ tulkintaa.

Koska Föllmerin integrointiteoria perustuu polun ominaisuuksiin, se on avannut teitä erilaisiin Iton teorian lajennuksiin.

Olkoon (x_t) integrattori ja (y_t) integrandi funktioita.

Oletamme ensi että (x_t) on rajoitetusti heilahteleva , siis $x_t = (x_t^+ - x_t^-)$, jossa x^\pm ovat Borel-mitallisia ja ei-väheneviä, ja (y_t) on Borel mitallinen ja rajoitettu, Silloin Lebesgue-Stieltjes integraali on hyvin määritelty

$$\int_0^t y_s dx_s = \int_0^t y_s dx_s^+ - \int_0^t y_s dx_s^-$$

Kun y_s on jatkuva, Lebesgue-Stieltjesin integraali yhtyy Riemann-Stieltjes integraalin kanssa. Seuraa myös että differentiaali kalkyyli on ensimmäisen asteen: jos $F(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$,

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t F_x(x_s) dx_s + \sum_{s \leq t} \{F(x_s) - F(x_{s-}) - F_x(x_{s-})(x_s - x_{s-})\}$$

jossa korjaustermejä esiintyy x polun hyppykohdissa.

Mitä tapahtuu jos integrattori x_t ei ole enää rajoitetusti heilahteleva? Minkäläisiä integrandia voidaan vielä integroida?

Huomataan ensi että kun x ei ole rajoitetusti heilahtelevä, Lebesgue Stieltjes integrointi tapa yleiselle mitalliselle integrandille y ei toimi, koska vaikka voidaan määritellä $x((s, t]) := (x_t - x_s)$, kuitenkin $x(B)$ ei ole hyvin määritelty kaikille Borelin joukoille B , siis x :n polusta ei saada mitta. Sen sijaan, joskus Riemann-Stieltjes integrointitapa sattaa vielä toimia.

Jatkossa oletamme että polku x on jatkuva.

Merkitsen ositusten jono $\{\pi_n\}$ jossa

$$\pi_n = \{t_0^n, \dots, t_{k_n}^n\}, \quad k_n < \infty, \quad 0 \leq t_0^n < \dots < t_{k_n}^n < \infty,$$

$$\Delta(\pi_n, t) = \max_{t_i^n \in \pi_n: t_i \leq t} (t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0 \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Sanomme että jatkuvalla funktiolla $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ on *poluttainen kvadraattinen variaatio* $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin, jos pistemittojen jono

$$\xi_n(dt) = \sum_{t_i \in \pi_n} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \delta_{t_i}(dt)$$

suppenee epämääräisesti (eng. *converges vaguely*) kohti Radonin mitta $\xi(dt)$, ja funktio $[x, x]_t := \xi([0, t])$ on jatkuva.

Tässä $\xi_n \rightarrow \xi$ *epämääräisesti* tarkoittaa että kaikille jatkuville ja kompaktikan-tajaisille funktioille $y_s \geq 0$,

$$\int y_s \xi_n(ds) \rightarrow \int y_s \xi(ds)$$

Huomautus: Epämääräinen konvergenssi = heikko konvergenssi kompakteis-sa.

Kun x on jatkuva tämä on yhtäpitävä sen kanssa että

$$\sum_{t_i \in \pi_n} (x_{t_{i+1} \wedge t} - x_{t_i \wedge t})^2 \rightarrow [x, x]_t \quad \forall t < \infty$$

pistettäin, kun $n \rightarrow \infty$.

Todistus: Olkoon $y \in C([0, t], \mathbb{R})$. Koska y on tasaisesti jatkuva kompakti välissä $[0, t]$ jokaiselle $\varepsilon > 0$, on olemassa $k, m, \tau_1, \dots, \tau_m$ joilla palottain väkiö funktiolle

$$y^\varepsilon(s) = \sum_{j=1}^m y_{\tau_j} \mathbf{1}_{(\tau_j, \tau_{j+1}]}(s) \quad \text{pätee} \quad \sup_{s \leq t} |y^\varepsilon(s) - y(s)| < \varepsilon$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{t_i \in \pi_n: t_i \leq t} y_{t_i} (x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n})^2 - \int_0^t y_s d[x, x]_s \right| \leq \\
& \left| \sum_{t_i \in \pi_n: t_i \leq t} y_{t_i}^\varepsilon (x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n})^2 - \int_0^t y_s d[x, x]_s \right| + \varepsilon \sum_{t_i \in \pi_n} (x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n})^2 \\
& = \left| \sum_{j=1}^m y_{\tau_j} \sum_{t_i^n \in \pi_n: \tau_j < t_i^n \leq \tau_{j+1} \wedge t} (x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n})^2 - \int_0^t y_s d[x, x]_s \right| + \varepsilon \sum_{t_i \in \pi_n} (x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n})^2 \\
& \rightarrow \left| \sum_{j=1}^m y_{\tau_j} ([x, x]_{\tau_{j+1} \wedge t} - [x, x]_{\tau_j \wedge t}) - \int_0^t y_s d[x, x]_s \right| + \varepsilon [x, x]_t \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Koska ε oli mielivaltaisen pieni, kun $\varepsilon \rightarrow 0$ Riemann-Stieltjesin integraalin määritelmästä seuraa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \pi_n} y_{t_i} (x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n})^2 = \int_0^t y_s d[x, x]_s \quad \square.$$

Huomautus Huomaamme myös että kun $s < t < u$,

$$|x_u - x_s| \leq |x_u - x_t| + |x_t - x_s|$$

mutta

$$(x_u - x_s)^2 = (x_u - x_t)^2 + (x_t - x_s)^2 + 2(x_u - x_t)(x_t - x_s)$$

joka ei tarvitse olla aina pienempi kuin $(x_u - x_t)^2 + (x_t - x_s)^2$. Siis kvadrattinen variaatio poikkeaa ensimmäisestä variaatiosta siinä että kun tihennetään ositus, approksimoiva summa ei välttämättä kasva, voi myös tulla pienemmäksi. Sen takia polun ensimmäinen variaatio ei riipu ositusten jonosta, mutta kvadraattinen variaatio olemassa ja sen olemassa olo voi riippua jonosta.

Huomautus Jos x on jatkuva ja rajoitetusti heilahteleva välissä $[0, t]$, seuraa että $[x, x]_t = 0$, koska

$$\begin{aligned}
& \sum_{t_i \in \pi_n: t_i \leq t} (x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n})^2 \leq \sup_{t_i \in \pi_n: t_i \leq t} |x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n}| \sum_{t_i \in \pi_n: t_i \leq t} |x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n}| \\
& \leq \sup_{t_i \in \pi_n: t_i \leq t} |x_{t_{i+1}^n} - x_{t_i^n}| \text{Var}_t(x) \rightarrow 0 \quad \text{kun } n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

koska $\text{Var}_t(x) < \infty$. Siis jos jotakin $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin on olemassa $[x, x]_t > 0$, seuraa että $\text{Var}_t(x) = \infty$.

Näytän että kun polulla on kvadraattinen variaatio $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin, sille pätee toisen asteen Iton kalkyyli.

Lause 0.1 (Föllmer 1979): Olkoon x jatkuva funktio jolla on poluttainen kvadraattinen variaatio $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin, ja olkoon $F(x) \in C^2(\mathbb{R})$. Silloin Iton kaava pätee:

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t F_x(x_s) dx_s + \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(x_s) d[x, x]_s, \quad t > 0$$

jossa poluttainen Iton integraali x :n suhteen on hyvin määritelty raja-arvona $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin

$$\int_0^t F_x(x_s) dx_s := \lim_n \sum_{t \geq t_i \in \pi_n} F_x(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$$

Todistus: koska x on jatkuva,

$$F(x_t) - F(x_0) = \lim_n \sum_{t \geq t_i \in \pi_n} (F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i}))$$

Taylorin kehitelmä antaa

$$\begin{aligned} \sum_{t \geq t_i \in \pi_n} (F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})) &= \\ \sum F_x(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \frac{1}{2} \sum F_{xx}(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 &+ \sum r(x_{t_i}, x_{t_{i+1}})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \end{aligned}$$

jossa $|r(u, v)| \leq \varphi(|u - v|)$, ja $\varphi(c) \rightarrow 0$ kun $c \rightarrow 0$ (φ voi riippua myös t :sta).

Kun $n \uparrow \infty$, oletuksen mukaan keskeinen summa suppenee kohti

$$\frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(x_s) d[x, x]_s$$

ja jäännös termien summan dominoi

$$\max_{t_i \in \pi_n} \varphi(|x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|) \sum_{t_i \in \pi_n, t_i \leq t} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \rightarrow 0 \cdot [x, x]_t \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Tästä seuraa että on olemassa $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin limes

$$\begin{aligned} \int_0^t F_x(x_s) dx_s &:= \lim_n \sum_{t \geq t_i \in \pi_n} F_x(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\ &= F(x_t) - F(x_0) - \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(x_s) d[x, x]_s \quad \square \end{aligned}$$

Huomautuksia:

i) Yleisesti tämän Ito integraalin arvo voi riippua ositusten jonosta. Kun $[x, x]$ on olemassa kaikille $\{\pi_n\}$ -jonoille eikä sen arvo riipu ositusten-jonosta, myös Iton integraali $\int F_x(x_s)dx_s$ on hyvin määritelty ja yksikäsitteinen.

ii) Selvästi *epämääräinen konvergenssi* on juuri se minimaalinen oletus jolla johdetaan poluttainen Iton kaava.

iii) Föllmerin tulos yleistyy moniulotteiselle *cadlag* poluille $x_t \in \mathbb{R}^d$, eli poluille joilla on olemassa vasemmanpuoleiset raja-arvot ja ovat oikealta puolelta jatkuvia.

iv) Jos F on $C^1(\mathbb{R})$ funktio ja x :lla on poluttainen kvadraattinen variaatio $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin, niin silloin funktiolla $y_t = F(x_t)$ on myös olemassa kvadraattinen variaatio $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin, ja

$$[y, y]_t = \int_0^t F_x(x_s)^2 d[x, x]_s$$

Todistus: Taylorin kehitelmällä

$$\begin{aligned} \sum_{t_i \in \pi_n: t_i \leq t} \{F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})\}^2 &= \sum F_x(x_{t_i})^2 (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 + \sum r(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}) (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\ &\rightarrow \int_0^t F_x(x_s)^2 d[x, x]_s \quad \text{kun } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

v) Tämä tulos riippuu myös integrandin muodosta, siis poluttaisessa Iton kaavassa integroimme x_t :n suhteen integrandi-poluille $y_t = F_x(x_t)$ jossa $F_x \in C(\mathbb{R})$. Poluttaisen kvadraattinen variaation olemassa olo ei takaa että poluttainen integrointi onnistuisi aivan kaikille jatkuville integrandi-prosesseille.

Olkoon π_n ositus ja $y \in C([0, t], \mathbb{R})$. Huomataan että

$$I_t^n(y) := \sum_{t \geq t_i \in \pi_n} y_{t_i} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$$

on lineaarinen operaattori. Osoitamme että kun $\text{Var}_t(x) = \infty$, integraali operaattori

$$I_t(y) = \int_0^t y_s dx_s \text{ ei ole jatkuva avaruudessa } (C([0, t], \mathbb{R}), |\cdot|_\infty).$$

Lause 0.2 (*Protterin kirjasta*) *Olkoon π_n on ositusten jono. Jos kaikille $y \in C(\mathbb{R})$ on olemassa $I_t(y) := \lim_n I_t^n(y)$, seuraa että polun ensimmäinen variaatio $\text{Var}_t(x) < \infty$, ja siksi $[x, x]_t = 0$.*

Todistus: $\forall n$:lle on olemassa funktio $y_n \in C(\mathbb{R})$ jolla $y_n(t_i) = \text{sign}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$, $\forall t_i \in \pi_n$, ja $|y_n|_\infty = 1$.

Seuraa että operaattorin normi

$$\|I_n\| \geq |I_n(y_n)| = \sum_{t \geq t_i \in \pi_n} \text{sign}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) = \sum_{t \geq t_i \in \pi_n} |x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|.$$

ja tästä seuraa että

$$\sup_n \|I_n\| \geq \text{Var}(x)_t$$

Jos kaikille $y \in C(\mathbb{R})$ on olemassa $I(y) = \lim_n I_n(y)$ $\{\pi_n\}$ -osituksia pitkin, niin $\sup_n |I_n(y)| < \infty$, tällöin Banach Steinhausin lauseesta seuraa että $\sup_n \|I_n\| < \infty$, eli siis $\text{Var}(x)_t < \infty$.

Muistutus (Banach-Steinhausin lause): Olkoon $(I_\nu : \nu \in J)$ perhe jatkuvia linearisia operaattoreita jossa $(X_i, |\cdot|_{X_i})$, $i = 1, 2$ ovat normi-avaruudet. Jos

$$\sup_{\nu \in J} |I_\nu(y)|_{X_2} \leq C(y)$$

kun otamme supremumin molemmille puolille seuraa että

$$\sup_{\nu \in J} \|I_\nu\| < \infty \quad , \quad \text{jossa} \quad \|I_\nu\| = \sup_y \frac{|I_\nu(y)|_{X_2}}{|y|_{X_1}}$$

on vahva operaattori-normi.

0.2 Iton kalkkyli stokastisen prosessin poluille

Määritelmä: Olkoon $(X_t(\omega) : t \geq 0)$ jatkuva stokastinen prosessi todennäköisyysavaruudessa (Ω, \mathcal{F}, P) . Sanomme että X :lla on *stokastinen kvadraattinen variaatio* prosessi $([X, X]_t(\omega) : t \geq 0)$ jos kaikille ositusten jonoille $\{\pi_n\}$, joille $\Delta(\pi_n, t) \rightarrow 0$

$$\sum_{t \geq t_i \in \pi_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \xrightarrow{P} [X, X]_t$$

jossa käytämme stokastista konvergenssia. Tästä seuraa että jokaiselle ositusten jonolle on olemassa deterministinen alijono $\{\pi_n\}$ jolla (ensi kaikille $t \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ ja koska $[x, x]$ on jatkuva kaikille $t \geq 0$)

$$\sum_{t \geq t_i \in \pi_n} (X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega))^2 \rightarrow [X, X]_t(\omega) \quad P\text{-melkein kaikille } \omega \quad (1)$$

Eli P -melkein kaikilla poluilla $X(\omega)$ on olemassa poluttainen kvadraattinen variaatio $[X(\omega), X(\omega)]$. $\{\pi_n\}$ -alijonoa pitkin joka yhtyy stokastiseen kvadraattiseen variaatioon $[X, X](\omega)$, ja Föllmerin poluttainen Iton kaava on voimassa.

Määritelmä 0.1 *Brownin liike B_t on gaussinen prosessi jonka lisäykset ovat riippumattomia ja $(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$. Voidaan rakentaa Brownin liikkeen version jolla on jatkuvia polkuja P m.v.*

Näytämme seuraavaksi millä ositusten jonoilla on mahdollista korvata stokastisen konvergenssin melkein varmalla konvergenssilla.

Olkoon Π_n dyadinen ositus $\Pi_n = \{t_k^n = k2^{-n} : k = 0, \dots, n2^n\}$.

Lause 0.3 (*Lévy*) *Brownin liikella on P melkein varmasti kvadrattinen variaatio $[B, B]_t = t$ dyadisten ositusten jonoa pitkin.*

Todistus: Laskemme ensi approksimoivien summien varianssin

$$E\left(\left\{\sum_{t_k^n \leq t} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\right\}^2\right) = \sum_{t_k^n \leq t} E(\{(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\}^2)$$

(koska lisäykset ovat riippumattomia ristitermien odotusarvo on 0)

$$= \sum_{t_k^n \leq t} \{E(\{\Delta B_{t_k^n}\}^4) + (\Delta t_k^n)^2 - 2(\Delta t_k^n)E(\{\Delta B_{t_k^n}\}^2)\} = 2 \sum_{t_k^n \leq t} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 = 2[t2^n]2^{-2n} \leq 2t2^{-n}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja

$$A_n = \{\omega : |t - \sum_{t_k^n \leq t} (B_{t_{k+1}^n}(\omega) - B_{t_k^n}(\omega))^2| > \varepsilon\}$$

Chebychevin epäyhtälöstä seuraa että

$$P(A_n) \leq 2t2^{-n}\varepsilon^{-2}$$

ja siksi

$$\sum_n P(A_n) \leq \varepsilon^{-2}4t < \infty$$

Nyt Borel Cantelli lemmasta seuraa että

$$P(\limsup_n A_n) = 0$$

joka tarkoittaa että P melkein varmasti $[B, B]_t$ on olemassa dyadisten ositusten pitkin.

Huomautukset Tässä todistuksessa oli olennaista että

$$\sum_n \left(\sum_{t_k^n \leq t} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \right) < \infty$$

Tästä näemme minkälaisä alijonoa pitää pomia jos halutaan korvata stokastista konvergenssia melkein varma konvergenssilla.

Nolla mittainen komplementaarinen joukko voi hyvin rippua osituksesta.

Lévy lause yleistyy myös tihentyville ositusten jonoille jossa $\{\pi_n\}$ jolla $\pi_n \subseteq \pi_{n+1}$, ja $\Delta(\pi_n, t) \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$.

Lause 0.4 *Brownin liikkeellä on P melkein varmasti kvadrattinen variaatio $[B, B]_t = t$ tihentyvien ositusten $\{\pi_n\}$ -jonoa pitkin.*

Tämän lauseen todistus ei ole täysin elementaarinen, se perustuu käänteis-martingaalin konvergenssiin. (Revuz Yor kirjasta, Proposition 2.12).

Joudumme käyttämään käänteis-martingaali konvergenssi lauseetta.

Seuraus Jos $F_x(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ Föllmerin poluttainen integraali tihentyvan osituksien jonoa pitkin ,

$$\int_0^t F_x(B_s)dB_s = F(B_t) - F(B_0) - \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(B_s)ds$$

yhtyy Iton integraalin kanssa P -nolla joukon ulkopuolelle.

0.3 Poluttainen Stratonovichin kalkyyli

Jos integraalin approksimoivissa summissa otetaan keskipiste , alkupisteen sijaan, siis

$$\begin{aligned} & \sum_{t_i \in \pi_n : t_i \leq t} F_x(x_{(t_{i+1}+t_i)/2})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) = \\ &= \sum F_x(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \sum (F_x(x_{(t_{i+1}+t_i)/2}) - F_x(x_{t_i}))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\ &= \sum F_x(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \sum F_{xx}(x_{t_i})(x_{(t_{i+1}+t_i)/2} - x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \\ &+ \sum r(x_{(t_{i+1}+t_i)/2}, x_{t_i})(x_{(t_{i+1}+t_i)/2} - x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\ &= \sum F_x(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \sum F_{xx}(x_{t_i})(x_{(t_{i+1}+t_i)/2} - x_{t_i})^2 + \\ &+ \sum F_{xx}(x_{t_i})(x_{(t_{i+1}+t_i)/2} - x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{(t_{i+1}+t_i)/2}) + \\ &+ \sum r(x_{(t_{i+1}+t_i)/2}, x_{t_i})(x_{(t_{i+1}+t_i)/2} - x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \end{aligned}$$

Lemma 0.1 *Jos x polulla on kvadraattinen variaatio (π_n) -jonoa pitkin seuraa että*

$$\sum_{t_i \in \pi_n : t_i \leq t} (x_{(t_{i+1}+t_i)/2} - x_{t_i})^2 \rightarrow \frac{1}{2}[x, x]_t, \quad (2)$$

$$\sum_{t_i \in \pi_n : t_i \leq t} (x_{(t_{i+1}+t_i)/2} - x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{(t_{i+1}+t_i)/2}) \rightarrow 0, \quad (3)$$

Lemmasta seuraa että (π_n) -jonoa pitkin Riemannin summat suppenevat kohti poluttaista Stratonovichin integraalia

$$\begin{aligned} \int_0^t F_x(x_s) \circ dx_s &:= \int_0^t F_x(x_s) dx_s + \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(x_s) d[x, x]_s \\ &= F(x_t) - F(x_0) - \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(x_s) d[x, x]_s + \int_0^t F_{xx}(x_s) d[x, x]_s = F(x_t) - F(x_0). \end{aligned}$$

Stratonovich integraali seuraa tavallista ensimmäisen asteista kalkyyliä.

Brownin liikkeen tapauksessa, kun määritellään poluttaiset integraalit dyaadisten ositusten jonoa pitkin $F_x \in C^1(\mathbb{R})$, saadaan

$$\int_0^t F_x(B_s) \circ dB_s = \int_0^t F_x(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t F_{xx}(B_s) ds = F(B_t) - F(B_0)$$

Kirjallisuus H. Föllmer, “Calcul d Ito sans probabilites” (1980). Séminaire de Probabilités XV, pp 143-149 Springer.